

Sapienza Università di Roma – Corso di laurea in Ingegneria Energetica
Geometria - A.A. 2016-2017 – prof. Cigliola
Foglio n.29 – Curve algebriche piane

Esercizio 1. Calcolare la molteplicità di intersezione tra la curva \mathcal{C} e la retta r nei punti accanto indicati, dove:

- (i) $\mathcal{C} : x^4 + y^4 - 3x^2y = 0$ e $r : x = 0$ nell'origine;
- (ii) $\mathcal{C} : x^3 + y^3 + xy = 0$ e $r : x - y = 0$ nei loro punti comuni;
- (iii) $\mathcal{C} : X_1(X_2 - X_1)^2 = X_2^2X_0$ e $r : X_1 = 0$ nell'origine (si passi in coordinate affini per semplicità);
- (iv) $\mathcal{C} : X_1(X_2 - X_1)^2 = X_2^2X_0$ e $r : X_2 = 0$ in $Y_\infty[0, 1, 0]$;
- (v) $\mathcal{C} : y^2 - y^3x + x^4 = 0$ e $r : y = 0$ nell'origine;
- (vi) $\mathcal{C} : y^2 = x^4 + x^5$ e $r : y = 0$ nei loro punti comuni.

Esercizio 2. Utilizzando esclusivamente i metodi della molteplicità di intersezione, determinare la molteplicità delle seguenti curve nei punti accanto indicati:

- (i) $\mathcal{C} : (x - 1)^2(x + 2)y + x^2 + 1 = 0$ nell'origine e nei suoi punti impropri;
- (ii) $\mathcal{C} : xy(x - 1)(x + 2) + x^2 + 1 = 0$ nei suoi punti impropri;
- (iii) $\mathcal{C} : y^2 = x^4 + x^5$ in un suo generico punto.

Esercizio 3. Determinare l'equazione della retta tangente a ciascuna delle seguenti curve algebriche piane affini nei punti accanto indicati:

- (i) $\mathcal{C} : x^2 - 2x + y^2 = 0$ nel punto $P = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$; $[x - \sqrt{3}y + 1 = 0]$
- (ii) $\mathcal{C} : (x + y)(x - y + 2) = 0$ nel punto $P = (0, 0)$; $[x + y = 0]$
- (iii) $\mathcal{C} : x^4 + y^4 - 3x^2y = 0$ nei suoi punti di ordinata 1;

[La curva è simmetrica rispetto all'asse y . I punti di ordinata 1 sono i punti $(\pm\sqrt{2} \pm 1, 1)$, con tutte le combinazioni di segno.]

La retta tangente a $(\sqrt{2} + 1, 1)$ è $r_1 : (20\sqrt{2} - 8)x - 23y - 12\sqrt{2} - 9 = 0$.

La retta tangente a $(\sqrt{2} - 1, 1)$ è $r_2 : (20\sqrt{2} + 8)x - 23y + 12\sqrt{2} - 9 = 0$.

Le altre due rette si ottengono per simmetria rispetto all'asse y da r_1 ed r_2 .]

- (iv) $\mathcal{C} : x^3 - 6xy + y^3 = 0$ in un suo generico punto $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$;
 $[(x_0^2 - 2y_0)x + (y_0^2 - 2x_0)y - 2x_0y_0 = 0]$
- (v) $\mathcal{C} : x^2 + (y - 1)^2 = r^2$, con $r > 0$, in un suo generico punto (x_0, y_0) ;
 $[x_0x + (y_0 - 1)y - r^2 - 2y_0 + 1 = 0]$
- (vi) $\mathcal{C} : xy - 1 = 0$ in un suo generico punto (x_0, y_0) . $[y_0x + x_0y - 2 = 0]$

Esercizio 4. Si dia l'equazione della chiusura proiettiva (rispetto ad X_0) delle curve dell'Esercizio 3 e si trovino i loro punti impropri.

- (i) $\overline{\mathcal{C}} : X_1^2 - 2X_0X_1 + X_2^2 = 0, P_1[1, 1, 0], P_2[1, 2, 0]$
- (ii) $\overline{\mathcal{C}} : X_1^2 + 2X_0X_1 + 2X_0X_2 - X_2^2 = 0, P_1[1, 1, 0], P_2[1, -1, 0]$
- (iii) $\overline{\mathcal{C}} : X_1^4 + X_2^4 - 3X_1^2X_2X_0 = 0$, non ci sono punti all'infinito
- (iv) $\overline{\mathcal{C}} : X_1^3 + X_2^3 - 6X_1X_2X_0 = 0, P[1, -1, 0]$
- (v) $\overline{\mathcal{C}} : X_1^2 + (X_2 - X_0)^2 = r^2X_0^2$, non ha punti all'infinito
- (vi) $\overline{\mathcal{C}} : X_1X_2 = X_0^2, X_\infty[1, 0, 0]$ e $Y_\infty[0, 1, 0]$

Esercizio 5. Determinare l'equazione della retta tangente a ciascuna delle seguenti curve algebriche piane proiettive nei punti accanto indicati:

- (i) $\mathcal{C} : X_0X_1 + 6X_2^2 + X_1^2 - 5X_1X_2 = 0$ in $P = [3, 1, 0]$; $[X_1 - 3X_2 + 3X_0 = 0]$
- (ii) $\mathcal{C} : X_1^5 - 2X_2^3X_0^2 - 2X_0^2X_1X_2^2 - X_0^4X_1 + X_2X_0^4 = 0$ in $P[0, 0, 1]$ $[X_1 - X_2 = 0]$
- (iii) $\mathcal{C} : 2X_0 - 3X_1 + X_2 = 0$ in $P[1, 1, 1]$ $[2X_0 - 3X_1 + X_2 = 0]$

(iv) $\mathcal{C} : X_1^3 + X_2^3 + X_0 X_1 X_2 - 2X_0^2 X_1 = 0$ in un suo generico punto $P[x_1, x_2, x_0]$
 $[(3x_1^2 - 2x_0^2 + x_0 x_2) X_1 + (3x_2^2 + x_0 x_1) X_2 + (x_1 x_2 - 4x_1 x_0) X_0 = 0]$

Esercizio 6. Sia dato il cambio di coordinate omogenee $\chi : \begin{cases} Y'_1 = Y_1 - Y_2 \\ Y'_2 = Y_1 + Y_2 + Y_0. \\ Y'_0 = Y_1 - Y_0 \end{cases}$ Trasformare le curve dell'Esercizio 5 secondo il cambio di coordinate χ .

Esercizio 7. Dimostrare che tutte e sole le coniche proiettive lisce sono quelle di rango 3.

Esercizio 8. Siano date le curve algebriche \mathcal{C} e \mathcal{D} . Dimostrare che i punti singolari della curva unione $\mathcal{C} \cup \mathcal{D}$ sono dati dall'unione dei punti singolari di \mathcal{C} , i punti singolari di \mathcal{D} e dei punti di intersezione tra \mathcal{C} e \mathcal{D} .

Esercizio 9. Determinare i punti regolari (propri e impropri) a tangente orizzontale ed a tangente verticale delle seguenti curve algebriche piane:

(i) $\mathcal{C} : (y + 1)(xy - y + 1) = 0;$

[La curva è unione dell'iperbole $\mathcal{S} : xy - y + 1 = 0$ e della retta $r : y = 1$. Tutti i punti di r sono a tangente orizzontale, tranne $P(2, -1)$ che è singolare (un nodo a tangenti distinte).

L'iperbole ha asintoti paralleli agli assi coordinati. Il punto all'infinito dell'asse y ha tangente verticale coincidente con l'asse y . Il punto all'infinito dell'asse x è invece singolare perché doppio: ha per tangenti la retta r e l'asse x .]

(ii) $\mathcal{C} : x^3 + y^3 = 0;$

[Non ci sono punti regolari a tangente orizzontale o verticale. Si osservi che la curva è unione della retta $x + y = 0$ e della conica $x^2 + y^2 - xy = 0$ che coincide con l'origine, che è pertanto un punto singolare della curva.]

(iii) $\mathcal{C} : x^3 + y^3 - xy = 0;$

[Non ci sono asintoti paralleli agli assi. Annullando la derivata parziale rispetto ad x si ottiene il punto $P(\frac{1}{3}\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4})$ a tangente orizzontale. Poiché la curva è simmetrica rispetto alla bisettrice di primo e terzo quadrante, il punto $P'(\sqrt[3]{4}, \frac{1}{3}\sqrt[3]{2})$ ha tangente verticale. Si osservi che l'origine è un nodo con tangenti gli assi cartesiani.]

(iv) $\mathcal{C} : x(y - x)^2 = y^2;$

[La curva ha l'asintoto verticale $x = 1$. Il punto $P(\frac{9}{4}, \frac{27}{4})$ ha tangente orizzontale. Non ci sono punti propri a tangente verticale.]

(v) $\mathcal{C} : x^n + y^n = 1$, con $n > 1$ intero;

[Per $n = 1$ non ci sono punti a tangente orizzontale o verticale. Per $n > 1$ pari, si hanno i punti $(0, \pm 1)$ a tangente orizzontale e i punti $(\pm 1, 0)$ a tangente verticale. Per $n > 1$ dispari si hanno il punto $(0, 1)$ a tangente orizzontale e il punto $(0, -1)$ a tangente verticale.]

(vi) $\mathcal{C} : y^2 + xy - 2x^2 = 0.$

[Non ci sono punti a tangente orizzontale o verticale.]

Esercizio 10. Sia data la curva $\mathcal{C} : y = p(x)$, dove $p(x)$ è un polinomio nella sola indeterminata x . Dimostrare che \mathcal{C} è una curva algebrica liscia e provare che l'equazione della retta tangente in un suo punto generico (usando il gradiente) coincide con la retta tangente trovata con i metodi dell'Analisi Matematica. Quanti sono i punti impropri di \mathcal{C} ?

Esercizio 11. Determinare la chiusura proiettiva e i punti impropri delle seguenti curve affini:

(i) $\mathcal{C} : 3x + 2y^2 = 1$

$[\overline{\mathcal{C}} : 3X_0 X_1 + 2X_2^2 = X_0^2, P[1, 0, 0]]$

(ii) $\mathcal{C} : x + y - 5x^2 y = 0$

$[\overline{\mathcal{C}} : X_0^2 X_1 + X_0^2 X_2 - 5X_1^2 X_2 = 0, X_\infty[1, 0, 0] \text{ e } Y_\infty[0, 1, 0]]$

(iii) $\mathcal{C} : 2x - 6y + 2x^2 y - 4xy^2 = 0$

$[\overline{\mathcal{C}} : 2X_0^2 X_1 - 6X_0^2 X_2 + 2X_1^2 X_2 - 4X_1 X_2^2 = 0, X_\infty[1, 0, 0], Y_\infty[0, 1, 0] \text{ e } P[2, 1, 0]]$

(iv) $\mathcal{C} : x^2 y^2 - 1 = 0$

$[\overline{\mathcal{C}} : X_1^2 X_2^2 = X_0^4, X_\infty \text{ e } Y_\infty]$

(v) $\mathcal{C} : x^2 y^2 + 2 = 0$

[La curva \mathcal{C} è vuota. Si osservi però che la sua chiusura proiettiva è costituita dai soli punti (singolari) impropri X_∞ e Y_∞ che pertanto *non si vedono* nel piano affine.]

Esercizio 12. Individuare le simmetrie (rispetto agli assi, rispetto all'origine, rispetto alle bisettrici) delle seguenti curve:

- (i) $\mathcal{C} : x^2 + y^2 = 9$; [Simmetrica rispetto agli assi, l'origine e le bisettrici]
- (ii) $\mathcal{C} : x + y - 2 = 0$ [Simmetrica rispetto alla bisettrice $y = x$]
- (iii) $\mathcal{C} : x^3 y^2 - x^2 + y^4 = 0$; [Simmetrica rispetto all'asse x]
- (iv) $\mathcal{C} : y^4 - y^2 + x^2 - x^4 = 0$; [Simmetrica rispetto agli assi, origine e bisettrici]
- (v) $\mathcal{C} : 3xy + x^3 y^3 - 2x^5 = 0$ [Simmetrica rispetto all'asse y]

Esercizio 13. Determinare gli (eventuali) asintoti delle seguenti curve algebriche piane e abbozzare la configurazione della curva in un intorno dei suoi punti all'infinito:

- (i) $\mathcal{C} : (x - 1)y - x = 0$;
 [La chiusura proiettiva di \mathcal{C} non ha punti singolari. I punti impropri sono X_∞ e Y_∞ . Più brevemente, l'asintoto verticale si trova annullando il coefficiente del termine di grado massimo in y , ovvero $(x - 1)y$. Da cui $x = 1$ è l'asintoto cercato. Similmente l'asintoto orizzontale è dato annullando il coefficiente di grado massimo in x . Riscrivendo \mathcal{C} come $x(y - 1) - y = 0$, si ottiene $y = 1$. Si osservi che \mathcal{C} è un'iperbole.]
- (ii) $\mathcal{C} : x(y - x) - y^3 - yx^2 = 0$;
 [L'unico punto improprio è X_∞ . Il termine di grado massimo in x è $-x^2(y + 1)$ da cui si ottiene l'asintoto $y = -1$ rispetto a cui la curva è da parti opposte.]
- (iii) $\mathcal{C} : (x^2 - 1)y - x^2 + 4y = 0$; [La curva è tutta dalla stessa parte (sotto) l'asintoto $y = 1$]
- (iv) $\mathcal{C} : x^2(y + 2) = y^2(x - 1)$;
 [La curva è da parti opposte rispetto a tutti i suoi asintoti: $y = -2$, $x = 1$ e $y = x + 3$]
- (v) $\mathcal{C} : x^3 + y^3 = 1$; [La curva è tutta dalla stessa parte (sopra) l'asintoto $y = -x$]
- (vi) $\mathcal{C} : x^4 + y^4 = 1$; [La curva non ha asintoti]
- (vii) $\mathcal{C} : x(y - x)^2 = y^2$;
 [I punti singolari della curva sono Y_∞ che origina l'asintoto $x = 1$ (rispetto a cui la curva è da parti opposte) ed il punto $P[1, 1, 0]$ con tangente $X_0 = 0$ che quindi non determina asintoti per \mathcal{C} .]
- (viii) $\mathcal{C} : y(y - x)(y + 2x) = 9x$.
 [La curva ha gli asintoti $y = 0$, $y = -2x$ e $y = x$ rispetto a cui è da parti opposte.]

Esercizio 14. Determinare i punti singolari propri e impropri delle seguenti curve algebriche piane:

- (i) $\mathcal{C} : x^3 - 6xy + y^3 = 0$;
 [Il gradiente omogenizzato è $\nabla = (3X_1^2 - 6X_0X_2; -6X_0X_1 + 3X_2^2; -6X_1X_2)$. Si ottiene il solo punto singolare $O(0, 0)$.]
- (ii) $\mathcal{C} : y^2(1 - x^2) = (x^2 + 2y - 1)^2$;
 [Il gradiente omogenizzato è $\nabla = (4X_0^2X_1 - 4X_1^3 - 8X_0X_1X_2 - 2X_1X_2^2; 4X_0^3 - 4X_0X_1^2 - 6X_0^2X_2 - 2X_1^2X_2; -4X_0^3 + 4X_0X_1^2 + 12X_0^2X_2 - 4X_1^2X_2 - 6X_0X_2^2)$. Si ottengono i punti propri $P(1, 0)$, $P'(-1, 0)$ e il punto improprio $Y_\infty[0, 1, 0]$]
- (iii) $\mathcal{C} : x^3y + x^2y^2 + xy^3 - 2xy - 1 = 0$; [P(1, -1) e P'(-1, 1).]
- (iv) $\mathcal{C} : (x^2 - 1)^2 + (y^2 - 1)^2 = 1$;
 [Il gradiente omogenizzato è $\nabla = (-4X_0^2X_1 + 4X_1^3; -4X_0^2X_2 + 4X_2^3; 4X_0^3 - 4X_0X_1^2 - 4X_0X_2^2)$. Si ottengono i punti $(\pm 1, 0)$, $(0, \pm 1)$.]
- (v) $\mathcal{C} : x^2y^2 - x^2 - y^2 + 1 = 0$;
 [Si osservi che la curva può essere riscritta come $(x^2 - 1)(y^2 - 1) = 0$. È facile allora capire che i suoi punti singolari sono $(1, \pm 1)$, $(-1, \pm 1)$, X_∞ , Y_∞]
- (vi) $\mathcal{C} : xy^2 + 2y - x^2 - 3x - 3 = 0$. [(-1, 1)]

Esercizio 15. Si considerino le curve

$$\mathcal{C} : (y^2 - x^2)(x - 1)(2x - 3) = 4(y^2 + x^2 - 2x)^2$$

$$\mathcal{D} : (x^2 + y^2)(x^2 + y^2 - 2x)^2 = 4(x^2 - y^2)^2.$$

- (i) Provare che i punti $O(0, 0)$, $P(1, 1)$ e $Q(1, -1)$ sono punti singolari di entrambe le curve \mathcal{C} e di \mathcal{D} .

[Per stabilire che l'origine è un punto singolare delle due curve, si osservi che i termini di grado minimo nei polinomi di \mathcal{C} e \mathcal{D} sono di grado maggiore di 1. Per gli altri due punti si proceda al calcolo del gradiente come di consueto.]

- (ii) Determinare il complesso tangente nell'origine a \mathcal{C} e \mathcal{D} .
 [Guardando ai termini di grado minimo nell'equazione di \mathcal{C} e \mathcal{D} , si trova che il complesso per \mathcal{C} è l'unione delle due rette $y = \pm\sqrt{\frac{19}{3}}x$. Il complesso tangente a \mathcal{D} nell'origine è invece dato da $3x^2y^2 - y^4 = 0$ che produce la retta $y = 0$ contata due volte (rispetto a cui l'origine è una cuspidale) e le rette $y = \pm\sqrt{3}x$.]
- (iii) Provare che entrambe le curve hanno grafico limitato.
 [Posto $X_0 = 0$, nell'equazione della chiusura proiettiva di \mathcal{D} si ottiene $(X_1^2 + X_2^2)(X_1^2 + X_2^2)^2 = 0$ che non produce punti reali. Similmente, nella chiusura proiettiva di \mathcal{C} si ottiene $2(X_2^2 - X_1^2)X_1^2 - 4(X_1^2 + X_2^2)^2 = 0$, che non ha soluzioni reali. Pertanto le due curve non hanno rami che si spingono fino all'infinito.]

Esercizio 16. Sia data la curva

$$\mathcal{C}: y^2(x-1)^2(x-y)^2 - x^2 - y^2 = 0.$$

- (i) Provare che \mathcal{C} ha l'origine come punto singolare e determinare il suo complesso tangente.
 [La curva passa per l'origine poiché non compare il termine noto. La parte di grado minimo nell'equazione di \mathcal{C} è $-x^2 - y^2 = 0$ che non produce rette reali. Si tratta pertanto di un punto isolato.]
- (ii) Provare che tutti i punti impropri di \mathcal{C} sono singolari.
 [La chiusura proiettiva di \mathcal{C} è $\mathcal{C}: X_2^2(X_1 - X_0)^2(X_1 - X_2)^2 - X_1^2X_0^4 - X_2^2X_0^4 = 0$. Ponendo $X_0 = 0$, si ottengono i punti $X_\infty[1, 0, 0]$, $Y_\infty[0, 1, 0]$ e $B[1, 1, 0]$. Per provare che sono singolari, si verifichi che annullano il gradiente.]
- (iii) Determinare gli asintoti di \mathcal{C} .

[Poiché i punti impropri di \mathcal{C} sono singolari, gli asintoti non possono essere calcolati a partire dalla formula della retta tangente. Nei punti impropri X_∞ e Y_∞ l'insieme delle rette tangenti (che sono asintoti per \mathcal{C} se si vedono nel piano affine) sono dati dall'annullamento del coefficiente del termine di grado massimo in x ed y rispettivamente. Il termine di grado massimo in x è y^2x^4 che produce l'asintoto $y = 0$ contato due volte. Il punto all'infinito dell'asse x si comporta come una cuspidale. Con un procedimento analogo, il termine di grado massimo in y è $(x-1)^2y^4$ che dà l'asintoto $x = 1$ contato due volte. Quindi, anche il punto Y_∞ (preso sulla retta $x = 1$) è una cuspidale posta all'infinito per \mathcal{C} . Per il punto B , che è il punto all'infinito della bisettrice $y = x$, conviene utilizzare un cambio di variabili per portare il punto dall'infinito al finito, meglio se nell'origine, nel quale sappiamo subito individuare il complesso

tangente. Utilizzeremo la trasformazione $\chi: \begin{cases} Y_1 = X_0 \\ Y_2 = X_2 - X_1 \\ Y_0 = X_1 \end{cases}$. Questa è conveniente poiché

$\chi(B) = B' = [0, 0, 1]$, ovvero l'origine del nuovo sistema di riferimento. Geometricamente, la trasformazione χ effettua una rotazione della sfera che rappresenta il piano proiettivo, portando

nell'origine B' il punto improprio B . La trasformazione inversa è $\chi^{-1}: \begin{cases} X_0 = Y_1 \\ X_1 = Y_0 \\ X_2 = Y_2 + Y_0 \end{cases}$. Inoltre

la curva trasformata sotto χ è $\chi(\overline{\mathcal{C}}) = \mathcal{C}': (Y_2 + Y_0)^2(Y_0 - Y_1)^2Y_2^2 - Y_0^2Y_1^4 - (Y_0 + Y_2)^2Y_1^4 = 0$. Per studiare il comportamento di \mathcal{C}' nella (nuova) origine deomogenizziamo con la sostituzione $Y_0 = 1, Y_1 = u$ e $Y_2 = v$. Si ottiene $(v+1)^2(1-u)^2v^2 - u^4 - (1+v)^2u^4 = 0$. I termini di grado minimo sono dati da $v^2 = 0$. Questo ci dice che la nuova origine è un punto singolare (doppio) con tangente doppia $v = 0$. Tornando in coordinate omogenee si ha $Y_2 = 0$ contato due volte. Ritornando infine alle coordinate proiettive iniziali, si ha la retta $X_2 - X_1 = 0$ contata due volte. Questa ci dà l'asintoto $y = x$ contato due volte.]

Esercizio 17. Dopo aver verificato che l'origine è un punto delle seguenti curve, determinare il complesso ad esso tangente e tracciare il grafico della curva in un intorno dell'origine:

- (i) $\mathcal{C}: x^3 - 6xy + y^3 = 0$; [nodo con tangenti gli assi coordinati]
- (ii) $\mathcal{C}: y^2 = x^3 - 2x^2$; [punto isolato]
- (iii) $\mathcal{C}: y^2 = 5x^3$; [cuspidale con tangente l'asse x contato due volte]

- (iv) $\mathcal{C} : y^2 - x^3 - x = 0;$ [punto regolare con tangente verticale]
- (v) $\mathcal{C} : y^2 - x^3 + x^4 = 0;$ [nodo con tangenti gli assi coordinati]
- (vi) $\mathcal{C} : y^4 + x^4 + xy^2 = 0;$ [cuspidi con tangente l'asse x contato due volte]
- (vii) $\mathcal{C} : x^2(y+2) = y^2(x-1);$ [nodo con tangenti le bisettrici]
- (viii) $\mathcal{C} : (x^2 + y^2)(y+x)^2 = 10xy(x-y);$ [punto triplo $x=0, y=0$ e $y=x$]
- (ix) $\mathcal{C} : (x^2 - 3y^2)(2y+x)^2 = 10x^2(x-y);$ [punto triplo $x=0$ doppio e $y=x$]
- (x) $\mathcal{C} : xy^2 + 2y - x^2 - 3x = 0.$ [punto regolare con tangente $y = \frac{3}{2}x$]

Esercizio 18. Dopo aver verificato che le seguenti curve hanno punti impropri singolari, determinarne gli (eventuali) asintoti:

- (i) $\mathcal{C} : (x-1)y^2 - x = 0;$
 [La curva ammette i punti impropri X_∞ e Y_∞ . Gli asintoti sono dati annullando i coefficienti dei termini di grado massimo in x ed y rispettivamente. Si ha $x(y^2 - 1)$ da cui gli asintoti $y = \pm 1$ e $(x-1)y^2$ da cui l'asintoto $x = 1$. In particolare, poiché X_∞ ha due tangenti distinte, è un punto singolare. Alternativamente si può procedere col gradiente come di consueto.]
- (ii) $\mathcal{C} : y^2x(y-x) - y^3 - yx^2 + 2x^2 = 0;$
 [La curva ammette i punti impropri X_∞ che è singolare, Y_∞ e $B[1, 1, 0]$. La tangente a B è la retta $X_1 - X_2 + 2X_0 = 0$ che produce l'asintoto $y = x + 2$. L'asintoto verticale si ottiene da $(x-1)y^3$ prendendo $x = 1$. Le rette tangenti nel punto all'infinito dell'asse x si ottengono dal termine di grado massimo in x : $x^2(-y^2 - y + 2)$ che danno le rette $y = 1$ e $y = -2$. Pertanto X_∞ è un nodo.]
- (iii) $\mathcal{C} : (x^2 - 1)(x-2)y^2 - x^3 + 4y = 0;$

[I termini di grado massimo della chiusura proiettiva sono dati da $(X_1^2 - X_0^2)(X_1 - 2X_0)X_2^2$. Ponendo $X_0 = 0$, si ottengono i punti impropri X_∞ e Y_∞ . Entrambi i punti sono singolari poiché annullano il gradiente. Gli asintoti sono ottenuti annullando i coefficienti dei termini di grado massimo in x e y rispettivamente. Da $(x^3 - 2x^2 - x + 2)y^2$ si ottengono gli asintoti verticali $x = \pm 1$ e $x = 2$. Da $(y^2 - 1)x^3$ si ottengono gli asintoti orizzontali $y = \pm 1$.]

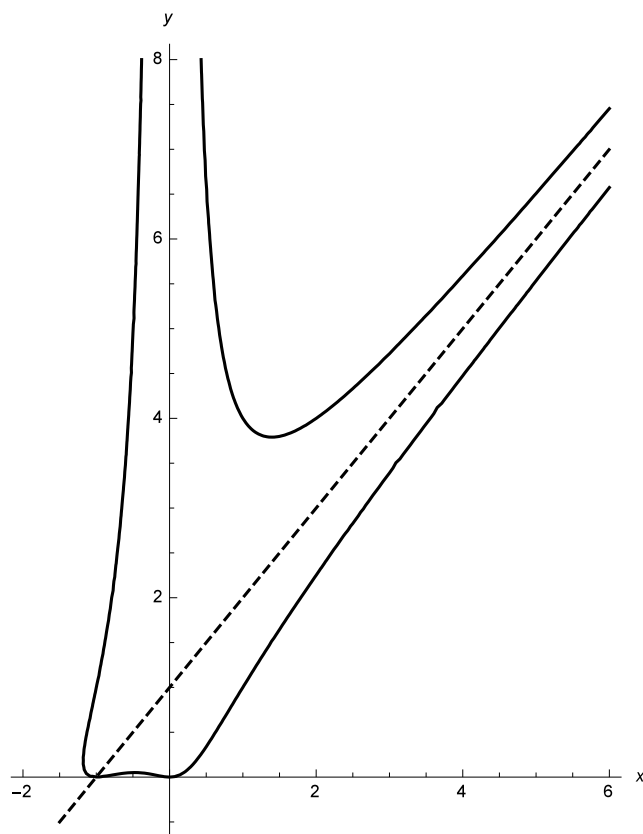
- (iv) $\mathcal{C} : x^2(y-x-1)^2 = y;$

[La chiusura proiettiva è $\overline{\mathcal{C}} : X_1^2(X_2 - X_1 - X_0)^2 - X_2X_0^3 = 0$. Il gradiente omogeneo è $\nabla = (2X_0^2X_1 + 6X_0X_1^2 + 4X_1^3 - 4X_0X_1X_2 - 6X_1^2X_2 + 2X_1X_2^2; -X_0^3 - 2X_0X_1^2 - 2X_1^3 + 2X_1^2X_2; 2X_0X_1^2 + 2X_1^3 - 3X_0^2X_2 - 2X_1^2X_2)$. I punti impropri sono Y_∞ e $B[1, 1, 0]$, entrambi singolari. Gli asintoti verticali sono dati considerando x^2y^2 che dà $x = 0$ contato due volte. Pertanto Y_∞ è una cuspidi. Per l'eventuale asintoto tangente in B , si proceda con il cambio di variabili χ :

$$\begin{cases} Y_1 = X_0 \\ Y_2 = X_2 - X_1 \\ Y_0 = X_1 \end{cases} \quad \text{Si ha } \chi(B) = B' = [0, 0, 1], \text{ ovvero l'origine del nuovo sistema di riferimento.}$$

La trasformazione inversa è $\chi^{-1} : \begin{cases} X_0 = Y_1 \\ X_1 = Y_0 \\ X_2 = Y_2 + Y_0 \end{cases}$ La curva trasformata è $\chi(\overline{\mathcal{C}}) : Y_0^2(Y_2 - Y_1)^2 - (Y_2 + Y_0)Y_1^3 = 0$.

Per studiare il comportamento nella (nuova) origine, deomogenizziamo con la sostituzione $Y_0 = 1, Y_1 = u$ e $Y_2 = v$. Si ottiene $(v-u)^2 - (v+1)v^3 = 0$. I termini di grado minimo sono dati da $v-u = 0$ contato due volte. Questo ci dice che la nuova origine è un punto singolare (doppio) con tangente doppia $v-u = 0$. Tornando in coordinate omogenee si ha $Y_2 = Y_1$ contato due volte. Ritornando infine alle coordinate proiettive iniziali, si ha la retta $X_2 - X_1 = X_0$ contato due volte. Questa ci dà l'asintoto $y = x + 1$ contato due volte.]



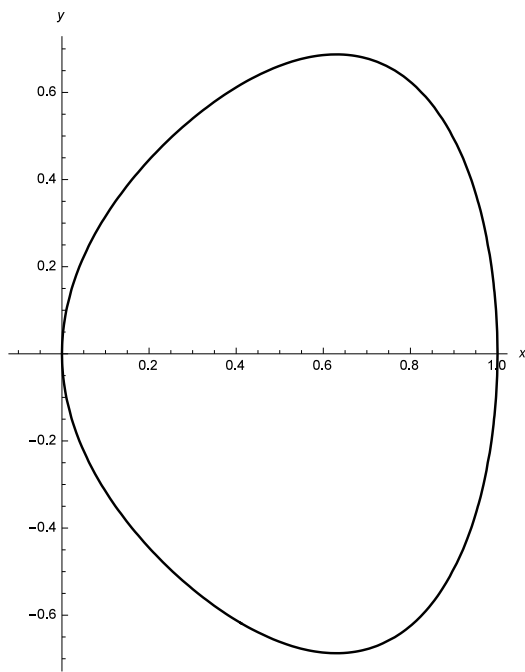
Esercizio 19. Studiare e tracciare il grafico delle seguenti curve algebriche piane:

- (i) $\mathcal{C} : 2x^2 - 4x + 2 + 3y^2 - 4 = 0;$ [ellisse]
- (ii) $\mathcal{C} : x^3 - 9xy + y^3 = 0;$ [folium di Cartesio]
- (iii) $\mathcal{C} : y^2 = x^3 - 2x^2;$ [parabola divergente di Newton con punto isolato]
- (iv) $\mathcal{C} : y^2 = x^3;$ [parabola cuspidata]
- (v) $\mathcal{C} : y^2 - x^3 - 2x = 0;$ [parabola divergente semplice]
- (vi) $\mathcal{C} : y^2 = 2x^3 - 4x;$ [parabola divergente con ovale]
- (vii) $\mathcal{C} : y^2 = x^3 - x^4;$ [si veda l'Esercizio svolto 21.93 del Testo]
- (viii) $\mathcal{C} : y^2 = x - x^4;$

[La curva è simmetrica rispetto all'asse x . È compresa nella striscia di piano $0 \leq x \leq 1$. Inoltre, si deduce che anche $0 \leq x^4 \leq 1$ e quindi $-1 \leq x - x^4 \leq 1$, da cui $-1 \leq y \leq 1$. Pertanto il grafico di \mathcal{C} è limitato. Il gradiente omogenizzato è $\nabla = (-X_0^3 + 4X_1^3; 2X_0^2X_2; -3X_0^2X_1 + 2X_0X_2^2)$. L'unico punto singolare $Y_\infty = [0, 1, 0]$ è anche l'unico punto improprio di \mathcal{C} . Ci aspettiamo che tale punto non abbia tangenti visibili nel piano affine poiché il grafico è limitato. Lo si può

verificare utilizzando il cambio di variabili $\chi : \begin{cases} Y_1 = X_1 \\ Y_2 = X_0 \\ Y_0 = X_2 \end{cases}$ che porta il punto Y_∞ nell'origine. La

chiusura proiettiva è $\overline{\mathcal{C}} : X_2^2X_0^2 - X_1X_0^3 + X_1^4 = 0$, la trasformata è $\chi(\overline{\mathcal{C}}) : Y_0^2Y_2^2 - Y_1Y_2^3 = 0$, che deomogenizzata diventa: $v^2 - uv^3 + u^4 = 0$. Qui l'origine è un punto doppio di natura cuspidale. La tangente è $v = 0$ contata due volte, cioè il punto improprio Y_∞ di \mathcal{C} ha la tangente $X_0 = 0$ contata due volte, che non produce alcun asintoto. La curva passa per i punti $P(0, 0)$, $Q(1, 0)$, che essendo regolari e sul bordo del dominio, sono necessariamente a tangente verticale. I punti a tangente orizzontale sono $(\frac{1}{\sqrt[3]{4}}, \pm \frac{\sqrt[3]{3}}{2\sqrt[3]{4}})$. Il grafico della curva è il seguente:

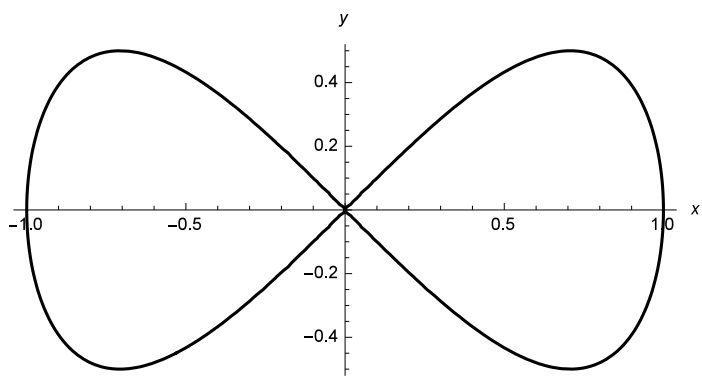


(ix) $\mathcal{C} : y^2 = x^2 - x^4;$

[La curva è simmetrica rispetto agli assi e quindi rispetto all'origine. È compresa nel rettangolo $[-1, 1] \times [-1, 1]$. I punti singolari sono l'origine, un nodo con tangenti $y = \pm x$, e il punto improprio (l'unico) Y_∞ che è una cuspide con tangente doppia $X_0 = 0$, a riprova del fatto che

la curva è limitata. Per vedere ciò si utilizzi il cambio di variabili $\chi : \begin{cases} Y_1 = X_1 \\ Y_2 = X_0 \\ Y_0 = X_2 \end{cases}$ che porta il

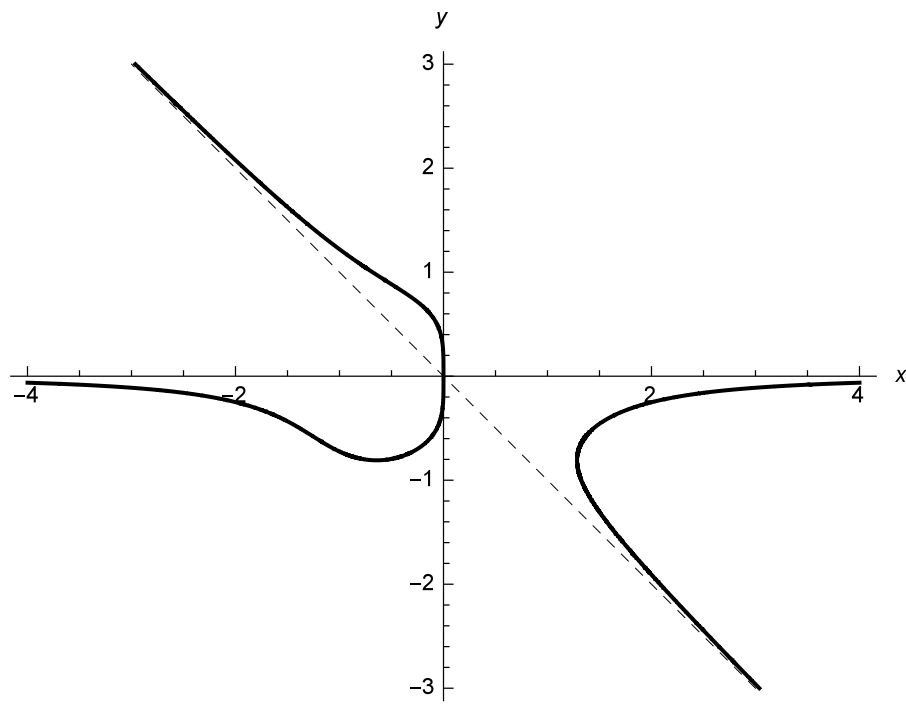
punto Y_∞ nell'origine. La curva passa per i punti regolari $(\pm 1, 0)$ che hanno (necessariamente) tangenti verticali per motivi di simmetria. I punti a tangente orizzontale sono $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm \frac{1}{2})$ e $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm \frac{1}{2})$. Intersecando la curva con le rette di tipo $y = mx$ si ottiene $m^4 x^4 + (m^2 - 1)x^2 = 0$. Questa dà la soluzione fissa $x = 0$ assieme ad altre due soluzioni, se e solo $-1 < m < 1$. Questo significa che il grafico della curva è compreso tra le due bisettrici e che in tale regione \mathcal{C} interseca le rette passanti per l'origine in tre punti distinti, uno dei quali è l'origine e gli altri due sono simmetrici rispetto a questo. Il grafico è il seguente:



(x) $\mathcal{C} : y^4 + yx^3 + x = 0;$

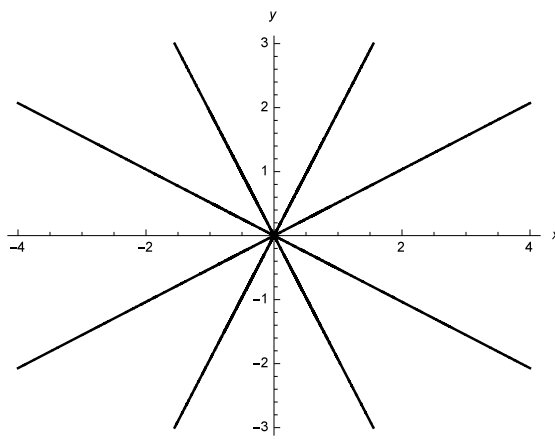
[La curva non gode di simmetrie notevoli ed è liscia. I suoi punti impropri sono X_∞ con tangente l'asse x e $B[1, -1, 0]$ con tangente $y = -x$. Con la sostituzione $X_2 = 0$ nell'equazione di \mathcal{C} si ottiene $X_1 X_0^3 = 0$, per cui la molteplicità di intersezione dell'asintoto orizzontale con la curva nel punto all'infinito X_∞ è dispari e la curva si dispone dalla stessa parte rispetto all'asse x . Con la sostituzione $X_1 = -X_2$ si ha similmente $X_1 X_0^3 = 0$ (molteplicità di intersezione dispari) che ci dice che la curva è dalla stessa parte rispetto all'asintoto $y = -x$. Insomma, i due punti impropri della curva sono dei flessi. I punti a tangente verticale sono l'origine e

$(\sqrt[9]{\frac{256}{27}}, -\sqrt[9]{\frac{4}{27}})$. L'unico punto a tangente orizzontale è $(-\frac{1}{\sqrt[9]{54}}, -\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[9]{54}})$. Si osservi che la curva non può avere punti nel primo quadrante, quindi all'infinito sta sotto l'asse x . Inoltre, poiché \mathcal{C} interseca l'asintoto $y = -x$ solo nell'origine, il grafico è tutto sopra la retta $y = -x$, per x positivi. Infine le rette di tipo $y = mx$ intersecano il grafico in punti che risolvono l'equazione $m^4 x^4 + mx^4 + x = 0$, ovvero $x[x^3(m^4 + m) + 1] = 0$. Questa produce la soluzione fissa $x = 0$ (cioè l'origine) e poi una seconda soluzione data dal fattore $x^3(m^4 + m) + 1 = 0$ se e solo se $m \neq 0$. Questo vuol dire che il grafico è confinato per le x positive tra i due asintoti e per le x negative, c'è un unico ramo che *abbraccia* dall'esterno i due asintoti. Il grafico è il seguente:



(xi) $\mathcal{C} : y^4 + x^4 - 4x^2y^2 = 0;$

[La curva è definita da un polinomio omogeneo di grado 4 in x ed y . È un fatto generale (lo si dimostri) che allora la curva è costituita o dall'unione di rette oppure dalla sola origine. Per vedere ciò, dividiamo per x^4 e poniamo $m = \frac{y}{x}$. Si ottiene $m^4 - 4m^2 + 1 = 0$ che dà le quattro soluzioni $m = \pm\sqrt{2 \pm \sqrt{3}}$. Quindi il grafico della curva è costituito dalle quattro rette $y = \pm\sqrt{2 \pm \sqrt{3}} x$. In particolare il suo grafico è simmetrico rispetto agli assi, bisettrici e origine.



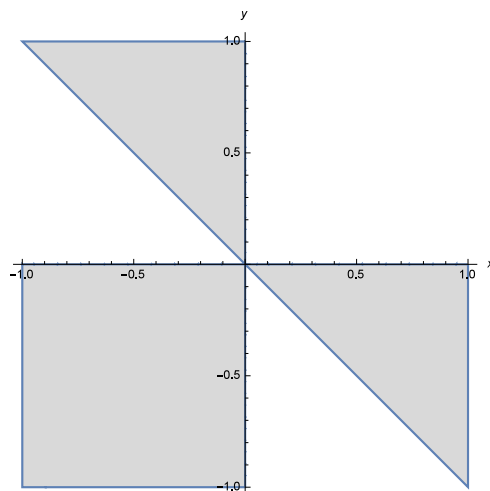
(xii) $\mathcal{C} : y^4 + x^4 + x^2y^2 = 0;$

[La curva ha per grafico solo l'origine, infatti è definita dalla somma di termini tutti positivi e manca il termine noto.]

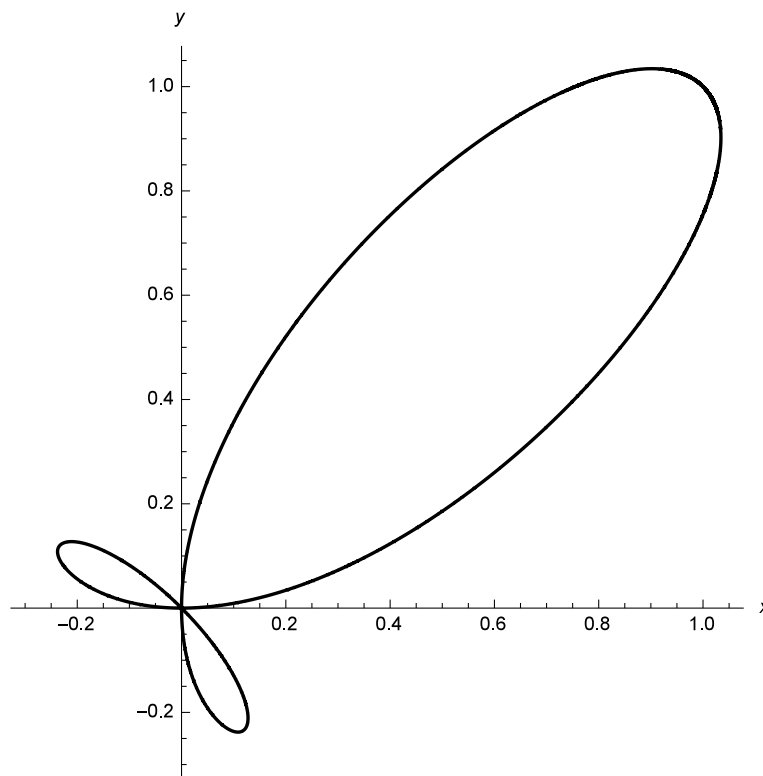
(xiii) $\mathcal{C} : x^4 + y^4 - 3xy^2 = 0;$ [si veda l'analoga curva studiata nell'Esercizio svolto 21.94 del Test]

(xiv) $\mathcal{C}: x^4 + y^4 - x^2y - y^2x = 0;$

[Risolvendo la disequazione $x^4 + y^4 = x^2y + y^2x = xy(x + y) \geq 0$, si ha che la curva non può svilupparsi nella parte colorata in figura:



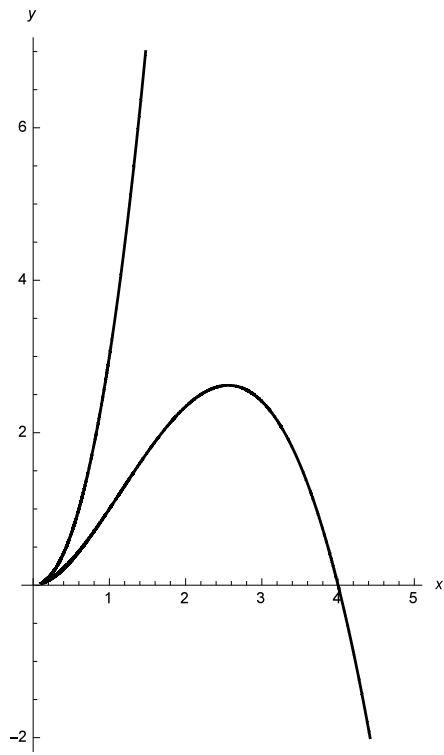
Intersecando la curva con le rette di tipo $y = mx$, con $m \neq 0$, si ottiene l'equazione $m^4x^4 - m^2x^3 - mx^3 = 0$ che dà le soluzioni $x = 0$ e $x = \frac{m^2+m}{m^4}$. Questo vuol dire che la curva incontra tutte le rette di quel tipo nell'origine e in un altro punto. La curva non ha punti impropri, quindi nemmeno asintoti. Pertanto il grafico della curva è limitato. L'origine è l'unico punto singolare ed ha complesso tangente dato da $xy(x + y) = 0$, esso è pertanto un punto triplo ordinario a tangenti distinte $x = 0$, $y = 0$ e $y = -x$. La curva è simmetrica rispetto alla bisettrice $y = x$ e passa per il punto $(1,1)$. Data la difficoltà, tralasciamo la determinazione dei punti a tangente orizzontale o verticale, ribadiamo però che sono nello stesso numero. Il grafico della curva è:



(xv) $\mathcal{C}: (y - 2x^2)^2 = x^5;$

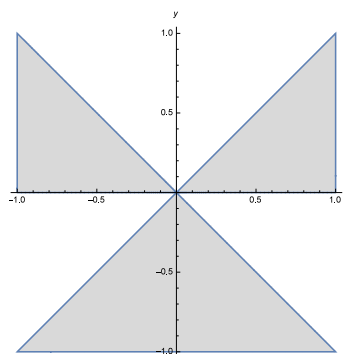
[La curva giace nel semipiano $x \geq 0$ e passa per i punti $(0,0)$ e $(4,0)$. Il solo punto improprio Y_∞ ha tangente che non si vede nel piano affine. I punti singolari sono l'origine con tangente

l'asse x contato due volte e il punto Y_∞ . La curva incontra le rette di tipo $x = k$, con $k > 0$, nei due punti di ordinata: $y = 2k^2 \pm \sqrt{k^5}$, una sempre positiva, l'altra, $2k^2 - \sqrt{k^5}$ è positiva per $0 < k < 4$. Da questo si deduce che l'origine è una cuspidi di seconda specie. In particolare non ci sono punti a tangente verticale e deve evidentemente esserci un punto a tangente orizzontale di ascissa compresa tra 0 e 4. Con un po' di pazienza si trova esplicitamente $(\frac{64}{25}, \frac{2^{13}}{5^5})$. \mathcal{C} è detta *curva a becco di Euler*:

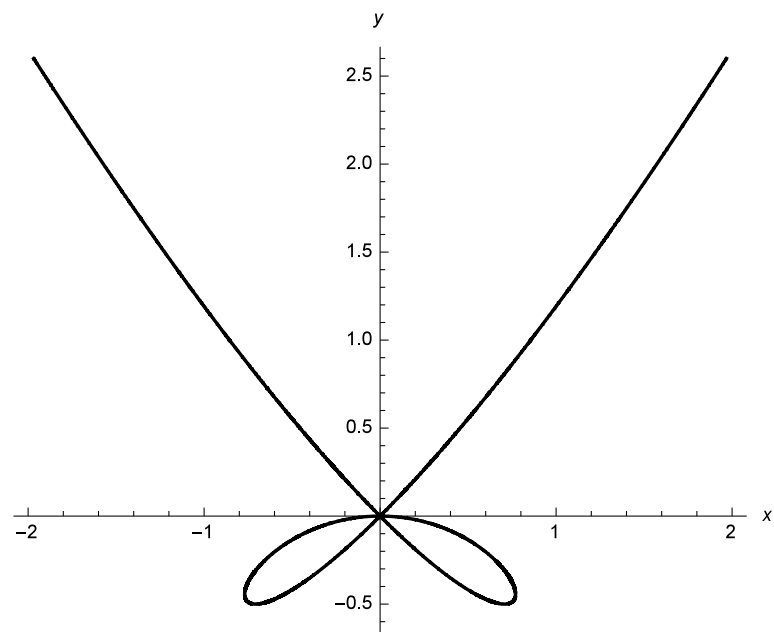


(xvi) $\mathcal{C} : x^4 + 2x^2y - 2y^3 = 0;$

[La curva è simmetrica rispetto all'asse y poiché nella sua equazione compaiono solo potenze pari della x . Risolvendo la disequazione $x^4 = 2y(y+x)(y-x) \geq 0$, si ottiene che la curva non può trovarsi nella parte colorata:

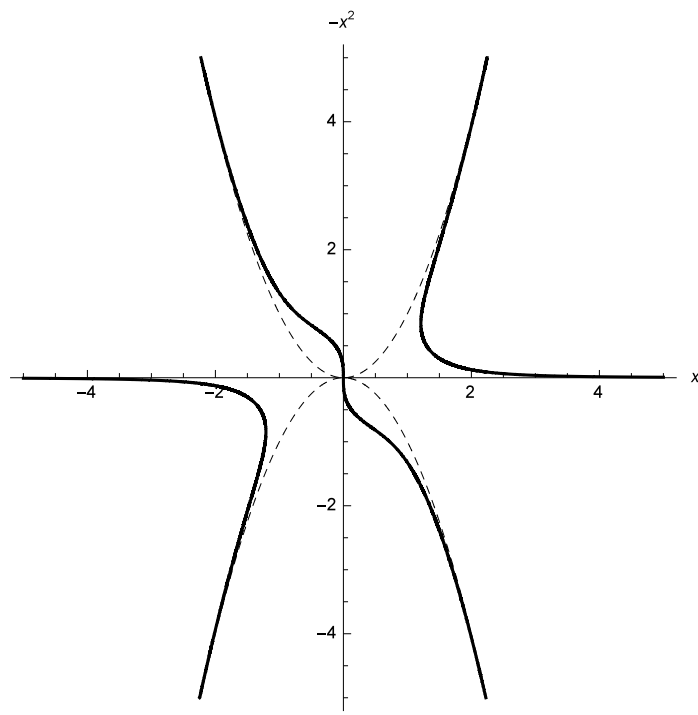


La curva interseca tutte le rette verticali (si lavora con un polinomio di terzo grado) e incontra le rette orizzontali del tipo $y = k$ se e solo se $k \geq -\frac{1}{2}$. In particolare i punti di intersezione sono 4 per i valori negativi di k , 2 per quelli positivi. L'origine è l'unico punto singolare (triplo ordinario) con tangenti $x = 0$, $y = \pm x$. La curva ha il solo punto improprio Y_∞ con tangente $X_0 = 0$: la curva è illimitata (per l'analisi precedente) e non ha asintoti. Il grafico è il seguente:



(xvii) $\mathcal{C}: x^4y - x - y^3 = 0$.

[La curva interseca tutte le rette verticali (è un polinomio di terzo grado in y) ed è simmetrica rispetto all'origine. Passa per l'origine, che ha tangente inflessionale l'asse y (con la sostituzione $x = 0$ si trova molteplicità di intersezione 3). La curva è liscia e ha l'asse x come asintoto rispetto a cui è da parti opposte. In prossimità dell'origine si comporta come la curva $x = -y^3$ (il termine di grado 5 va a zero più velocemente). Per valori x finiti e valori di $y \rightarrow \infty$, possiamo scrivere la curva come $x^4 - \frac{x}{y} = y^2$ che diventa $y = \pm x^2$. La curva ha allora quattro rami che si comportano all'infinito come tali parabole. Ci sono due punti a tangente verticale oltre l'origine, uno nel primo e uno nel terzo quadrante. Il grafico è il seguente:

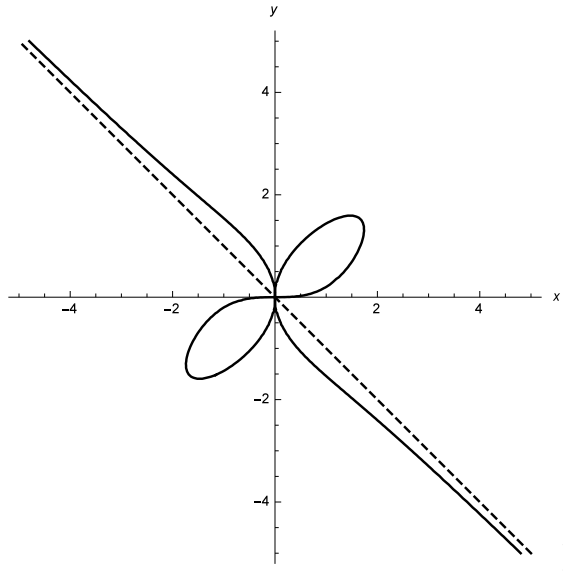


(xviii) $\mathcal{C}: x^4 - xy - y^3 = 0$;

[La curva ha grado dispari, quindi ha grafico illimitato. In particolare interseca ogni retta verticale. L'origine è l'unico punto singolare con tangenti $x = 0$ e $y = 0$. L'intersezione con l'asse x , dà $x^4 = 0$, molteplicità pari, quindi la curva è dalla stessa parte rispetto all'asse x . Intersecando con l'asse y si ottiene $y^3 = 0$, quindi l'asse y è una tangente inflessionale per la curva nell'origine. L'unico punto improprio è Y_∞ che non dà asintoti.]

(xix) $\mathcal{C} : x^5 + y^5 - 5x^2y = 0$.

[La curva è simmetrica rispetto all'origine. L'origine è l'unico punto singolare con tangenti l'asse y contato due volte e l'asse x . La curva ha il solo asintoto $y = -x$. Per motivi di simmetria rispetto all'asse y ha una "doppia cuspide". Poiché deve essere $\frac{x^5+y^5}{y} = 5x^2 \geq 0$, $\frac{x+y}{y} \geq 0$, la curva non può trovarsi negli angoli formati dall'asse x e dalla bisettrice del secondo e quarto quadrante. Con un po' di calcoli si trova che la curva ha nel primo quadrante (e per simmetria nel terzo) un punto a tangente orizzontale ed uno a tangente verticale. Le rette di tipo $y = mx$, intersecano la curva solo nell'origine per $-1 \leq m \leq 0$, nell'origine e in due punti (simmetrici rispetto all'origine) per $m < -1 \vee m > 0$. Pertanto il grafico compreso nel primo (e nel terzo) quadrante è limitato.]



Esercizio 20. Al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$, si consideri la famiglia di curve:

$$\mathcal{C}_a : x^2y = x + a.$$

- (i) Provare che le curve \mathcal{C}_a non hanno alcun punto in comune.
- (ii) Provare che le \mathcal{C}_a hanno un asintoto in comune.
- (iii) Determinare i punti a tangente orizzontale delle \mathcal{C}_a al variare di $a \in \mathbb{R}$.
- (iv) Tracciare il grafico di \mathcal{C}_a al variare di $a \in \mathbb{R}$.

Esercizio 21. Dimostrare che due circonferenze hanno al più due punti propri in comune.

[Sia da risolvere il sistema $\begin{cases} x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \\ x^2 + y^2 + a'x + b'y + c' = 0. \end{cases}$ Sottraendo membro a membro le due equazioni, si ottiene il sistema equivalente: $\begin{cases} x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \\ (a - a')x + (b - b')y + (c - c') = 0. \end{cases}$ Dal teorema di Bézout abbiamo che una retta ed una circonferenza si incontrano in al più due punti, necessariamente propri.]