

Sapienza Università di Roma
Corso di laurea in Ingegneria Energetica
Geometria - A.A. 2015-2016
Foglio n.27 – Coniche
prof. Cigliola

Esercizio 1. Per ciascuna delle seguenti coniche si dia la classificazione, si trovi la corrispondente forma canonica, la si riduca in forma canonica per mezzo di un'isometria diretta; se sono di rango massimo si dia un sistema di riferimento in cui la conica ha per equazione la sua forma canonica, si trovino (ove possibile) centro, vertice, assi di simmetria, asintoti etc.; di ciascuna infine, si disegni il suo grafico nel piano cartesiano:

- (i) $\mathcal{C} : 3x^2 - 10xy + 3y^2 - 2x - 2y + 3 = 0;$
- (ii) $\mathcal{C} : x^2 + y^2 + 4xy + 1 = 0;$
- (iii) $\mathcal{C} : x^2 + 5x + 6 = 0;$
- (iv) $\mathcal{C} : x^2 + y^2 + 4xy + 6x + 6y + 6 = 0;$
- (v) $\mathcal{C} : x^2 + y^2 + 2xy + 2x + 2y - 3 = 0;$
- (vi) $\mathcal{C} : x^2 + 9y^2 + 6xy + 6x - 2y + 1 = 0;$
- (vii) $\mathcal{C} : x^2 4y^2 + 2x - 3 = 0;$
- (viii) $\mathcal{C} : x^2 - 2y^2 + 4x - 8y - 2 = 0;$
- (ix) $\mathcal{C} : x^2 + 3xy + 2y^2 + x + 2y = 0;$
- (x) $\mathcal{C} : 3x^2 + 2xy + 3y^2 + x + 2y + 1 = 0;$
- (xi) $\mathcal{C} : x^2 + xy = 0;$
- (xii) $\mathcal{C} : x^2 + 4xy + 4y^2 - 5 = 0;$
- (xiii) $\mathcal{C} : x^2 + 6xy + y^2 - 3 = 0;$
- (xiv) $\mathcal{C} : 3x^2 + 2xy + 3y^2 - 8 = 0;$
- (xv) $\mathcal{C} : x^2 + y^2 + xy + x + y + 1 = 0;$
- (xvi) $\mathcal{C} : 2x^2 + 3y^2 + 4xy - x + y = 0;$
- (xvii) $\mathcal{C} : -x^2 - 2y^2 + 3xy + x - 2y + 1 = 0;$
- (xviii) $\mathcal{C} : x^2 + x + 1 = 0;$
- (xix) $\mathcal{C} : x^2 = 0;$
- (xx) $\mathcal{C} : 3x^2 - y^2 + 2xy + 2x - 4y + 1 = 0;$
- (xxi) $\mathcal{C} : x^2 - 3y^2 + xy + x + 2y - 5 = 0;$
- (xxii) $\mathcal{C} : x^2 + 2xy + y^2 + 4x = 0;$

- (xxiii) $\mathcal{C} : x^2 + 2xy + 2y^2 - 2x + 2 = 0;$
- (xxiv) $\mathcal{C} : 4x^2 + 4xy + y^2 + 2x + y = 0;$
- (xxv) $\mathcal{C} : x^2 + 5y^2 + 7 + 8xy + 10x + 11y = 0;$
- (xxvi) $\mathcal{C} : x^2 - 2xy + 3y^2 = 0;$
- (xxvii) $\mathcal{C} : xy + y + x = 0;$
- (xxviii) $\mathcal{C} : x^2 + y^2 + 1 + 2xy + 2x + 2y = 0;$
- (xxix) $\mathcal{C} : x^2 - y + 1 = 0;$
- (xxx) $\mathcal{C} : 20x^2 - 12xy + 5y^2 - 1 = 0;$
- (xxxi) $\mathcal{C} : 16xy + 8x - 8y^2 = 4y + 1;$
- (xxxii) $\mathcal{C} : 5x + y - 4x^2 - 4xy - y^2 - 1 = 0;$
- (xxxiii) $\mathcal{C} : x + 5y - 4x^2 - 4xy - y^2 - 1 = 0;$
- (xxxiv) $\mathcal{C} : x^2 - 10xy + y^2 + 10x - 2y + 1 = 0;$
- (xxxv) $\mathcal{C} : 8x^2 - 12xy + 17y^2 + 60x - 70y + 105 = 0;$
- (xxxvi) $\mathcal{C} : 3x^2 - 4\sqrt{3}xy + 4y^2 + 2\sqrt{3}x - 4y + 1 = 0;$
- (xxxvii) $\mathcal{C} : 5x^2 - 2\sqrt{3}xy + 7y^2 - 12\sqrt{3}x + 20y + 36 = 0;$
- (xxxviii) $\mathcal{C} : 9x^2 + 6xy + y^2 - 6x - 2y - 39 = 0;$
- (xxxix) $\mathcal{C} : 3x^2 + 2xy + 3y^2 - 4x - 12y + 12 = 0;$
- (xl) $\mathcal{C} : 4x^2 - 12xy + 9y^2 - 4x + 6y + 53 = 0.$

Esercizio 2. Al variare di $a, b, c \in \mathbb{R}$, classificare le coniche di tipo:

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = 0.$$

Esercizio 3. Al variare di $k \in \mathbb{R}$, classificare le seguenti coniche:

(i) $\mathcal{C}_k : x^2 + ky^2 + 4xy + 2x + 2y - 1 = 0$

(ii) $\mathcal{C}_k : x^2 + 9y^2 + 2kxy + 2x + 2y = 0$

(iii) $\mathcal{C}_k : x^2 + y^2 + 2kxy + 1 = 0.$

Esercizio 4. Che tipo di grafico può avere una conica nell'equazione della quale manca una delle due indeterminate? Che tipo di grafico può avere invece se mancano i termini di grado minore di due?

Esercizio 5. Dopo aver provato che i seguenti polinomi sono decomponibili come prodotto di polinomi di grado 1, trovare la loro decomposizione:

(i) $f(x, y) = 4x^2 - 12xy + 4x + 9y^2 - 6y + 1$

(ii) $f(x, y) = x^2 - 4xy + 4x + 4y^2 - 8y + 3$

(iii) $f(x, y) = x^2 - 5x - y^2 + 5y$

(iv) $f(x, y) = x^2 - 2xy + 4x + y^2 - 4y + 4$

(v) $f(x, y) = x^2 - xy - \frac{1}{2}x - 2y^2 + \frac{5}{2}y - \frac{1}{2}$

(vi) $f(x, y) = 4x^2 - 4xy - 2x + y^2 + y - 2$