Sapienza Università di Roma – Corso di laurea in Ingegneria Energetica
Geometria - A.A. 2015-2016 – prof. Cigliola
Foglio n.27 – Coniche proiettive

Esercizio 1. Classificare le seguenti coniche proiettive stabilendone il rango, un'equazione canonica, il tipo rispetto alla retta impropria $X_0 = 0$ (quando sono di rango 3) e determinare l'equazione della parte affine rispetto ad X_0:

(i) $\mathscr{C}: \ X_0^2 + X_1^2 + 2X_0X_2 + 2X_1X_2 + X_2^2 = 0$

[La matrice associata è $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Il polinomio caratteristico è $p(\lambda) = -\lambda^3 + 3\lambda^2 - \lambda - 1$. Con la regola dei segni si trova la segnatura sgn $= (2, 1)$. Pertanto si tratta di una conica generale a punti reali con forma canonica $Y_1^2 + Y_2^2 - Y_0^2 = 0$. La conica ha il solo punto improprio $[1, -1, 0]$, è quindi di tipo parabolico. La sua parte affine (rispetto a X_0) è $x^2 + 2xy + y^2 + 2y + 1 = 0$.]

(ii) $\mathscr{C}: \ X_0^2 + 2X_0X_1 + X_1^2 + 2X_0X_2 + 2X_1X_2 + X_2^2 = 0$

[La matrice associata è $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Il rango vale 1, la forma canonica è quindi $Y_1^2 = 0$. La sua parte affine (rispetto a X_0) è $x^2 + 2xy + y^2 + 2y + 2x + 1 = 0$.]

(iii) $\mathscr{C}: \ X_0^2 + 4X_0X_1 + 2X_0X_2 + 2X_1X_2 + 2X_2^2 = 0$

[$Y_1^2 + Y_2^2 - Y_0^2 = 0$, $2y^2 + 2xy + 2y + 4x + 1 = 0$]

(iv) $\mathscr{C}: \ 4X_0X_1 - X_1^2 - 4X_0X_2 + 2X_1X_2 - X_2^2 = 0$

[$Y_1^2 - Y_2^2 = 0$, $4x - x^2 - 4y + 2xy - y^2 = 0$]

(v) $\mathscr{C}: \ 4X_0X_1 - X_1^2 + 2X_1X_2 - X_2^2 = 0$

[La segnatura della matrice è sgn $= (1, 2)$, quindi la forma canonica è $Y_1^2 + Y_2^2 - Y_0^2 = 0$. La parte affine ha equazione $4x - x^2 + 2xy - y^2 = 0$.]

Esercizio 2. Al variare di $k \in \mathbb{R}$, classificare (per rango e tipo) e trovare una forma canonica delle seguenti coniche proiettive:

(i) $\mathscr{C}: \ 2kX_1X_0 + X_0^2 + 6X_2X_0 + X_1^2 + 4X_1X_2 = 0$

[La matrice è $\begin{pmatrix} 1 & 2 & k \\ 2 & 0 & 3 \\ k & 3 & 1 \end{pmatrix}$. Il polinomio caratteristico è $p(\lambda) = -\lambda^3 + (2 + k^2)\lambda^2 + 12\lambda + (12k - 13)$. Leggendo il segno dei coefficienti di tale polinomio deduciamo la forma canonica della conica data. Per $k = \frac{13}{12}$, il rango è 2 e la forma canonica è $Y_1^2 - Y_2^2 = 0$. Se invece $k \neq \frac{13}{12}$, indipendentemente dal suo segno, abbiamo un autovalore discorde con gli altri due, allora la forma canonica è $Y_1^2 + Y_2^2 - Y_0^2 = 0$.]

(ii) $\mathscr{C}: \ 2kX_1X_0 + X_0^2 + X_1^2 + X_2^2 + 4X_1X_2 = 0$

[La matrice è $\begin{pmatrix} 1 & 2 & k \\ 2 & 1 & 0 \\ k & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Il polinomio caratteristico è $p(\lambda) = -\lambda^3 + 3\lambda^2 + (k^2 + 1)\lambda - k^2 - 3$. Abbiamo che il rango è 3 per ogni valore di k. Inoltre, essendo i coefficienti del polinomio caratteristico nell'ordine negativo, positivo, positivo, negativo, abbiamo che la forma canonica è $Y_1^2 + Y_2^2 - Y_0^2 = 0$, indipendentemente da k.]

(iii) $\mathscr{C}: \ kX_0^2 + X_1^2 - X_2^2 = 0$

[Per $k = 0$ il rango è 2 e la forma canonica è $Y_1^2 - Y_2^2 = 0$, per $k \neq 0$ il rango è 3 e la forma canonica è $Y_1^2 + Y_2^2 - Y_0^2 = 0$. La conica è di tipo iperbolico con i due punti impropri $[1, \pm 1, 0]$.]

(iv) $\mathscr{C}:\ 2kX_0X_1 + X_1^2 + 4X_2X_1 + X_2^2 = 0$

(v) $\mathscr{C}:\ 2kX_1X_0 + X_0^2 + 2X_2X_0 + X_1^2 + X_2^2 + 2X_1X_2 = 0$

Esercizio 3. Trovare la forma canonica della chiusura proiettiva delle seguenti coniche nel piano affine e determinarne i punti impropri rispetto ad X_0:

(i) $\mathscr{C}:\ x^2 + 2xy + 3y - 1 = 0$

[La matrice della conica è $\begin{pmatrix} -1 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ \frac{3}{2} & 1 & 0 \end{pmatrix}$ che ha rango 3. Inoltre la parte quadratica ha determinante negativo, quindi la conica è un'iperbole generale. Allora la forma canonica proiettiva è $Y_1^2 + Y_2^2 - Y_0^2 = 0$. La parte omogenea di secondo grado in coordinate proiettive è $X_1^2 + 2X_1X_2 = 0$ che dà i due punti impropri $[0,1,0]$ e $[-2,1,0]$.]

(ii) $\mathscr{C}:\ 3xy + x - 4y + 2 = 0$

[La matrice della conica è $\begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{2} & -2 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} \\ -2 & \frac{3}{2} & 0 \end{pmatrix}$ che ha rango 3. La parte quadratica ha determinante negativo, quindi la conica è un'iperbole generale. Allora la forma canonica proiettiva è $Y_1^2 + Y_2^2 - Y_0^2 = 0$. La parte omogenea di secondo grado in coordinate proiettive è $3X_1X_2 = 0$ che dà i due punti impropri $[0,1,0]$ e $[1,0,0]$.]

(iii) $\mathscr{C}:\ 3x^2 - 2xy + x = 0$ [$Y_1^2 + Y_2^2 - Y_0^2 = 0$, $[2,3,0]$ e $[0,1,0]$]

(iv) $\mathscr{C}:\ x^2 + 4xy + 4y^2 + 1 = 0$

[La conica può essere riscritta come $(x+2y)^2 + 1 = 0$, che in coordinate proiettive diventa $(X_1 + 2X_2)^2 + X_0^2 = 0$. Questa rappresenta una conica di rango 2 ridotta ad un punto. La sua forma canonica è allora $Y_1^2 + Y_2^2 = 0$.]

(v) $\mathscr{C}:\ 4x^2 + 12xy + 9y^2 = 0$

[Si tratta di un'ellisse ridotta ad un punto. La forma canonica proiettiva è $Y_1^2 + Y_2^2 = 0$.]

Esercizio 4. Si considerino la conica euclidea $\mathscr{C}: x^2 + 2xy - y^2 + 2x - 1 = 0$ e la conica proiettiva $\mathscr{D}:\ X_0^2 + 2X_0X_1 - X_1^2 + 2X_1X_2 + X_2^2 = 0$.

(i) Determinare la forma canonica euclidea $\mathscr{C}_e$ di $\mathscr{C}$ e trovare un'isometria g che trasforma $\mathscr{C}$ in $\mathscr{C}_e$.

(ii) Determinare la forma canonica proiettiva $\mathscr{D}_0$ di $\mathscr{D}$ e trovare un cambiamento di coordinate proiettive che trasforma $\mathscr{D}$ in $\mathscr{D}_0$.

(iii) Detta $\mathscr{C}_0$ la chiusura proiettiva di $\mathscr{C}$ (rispetto a X_0), trovare, se esiste un cambiamento di coordinate omogenee che trasforma $\mathscr{C}_0$ nella conica proiettiva $\mathscr{A}:\ 2X_1X_2 - X_0^2 = 0$.

Esercizio 5. Siano date le coniche euclidee $\mathscr{C}:\ x^2 + y^2 - 3 = 0$ e $\mathscr{D}:\ xy - 2 = 0$ e siano $\overline{\mathscr{C}}$ e $\overline{\mathscr{D}}$ le rispettive chiusure proiettive rispetto ad X_0. Dopo aver spiegato perché $\overline{\mathscr{C}}$ e $\overline{\mathscr{D}}$ hanno la stessa forma canonica proiettiva, trovare un cambiamento di coordinate proiettive che trasforma $\overline{\mathscr{C}}$ in $\overline{\mathscr{D}}$.

[Le coniche sono rispettivamente un'ellisse ed un'iperbole generale. Le loro chiusure proiettive hanno quindi la stessa forma canonica $Y_1^2 + Y_2^2 - Y_0^2 = 0$. Più facilmente, leggendo direttamente dall'equazione delle coniche, per portare $\overline{\mathscr{C}}$ in forma canonica basta usare il cambiamento di coordinate $\chi: \begin{cases} X_1 = Y_1 \\ X_2 = Y_2. \\ \sqrt{3}X_0 = Y_0 \end{cases}$ Per $\overline{\mathscr{D}}$ invece basta usare $\psi: \begin{cases} X_1 = Y_1 - Y_2 \\ X_2 = Y_1 + Y_2. \\ \sqrt{2}X_0 = Y_0 \end{cases}$ Il cambiamento di coordinate cercato è $\psi^{-1} \circ \chi$]