Sapienza Università di Roma
Corso di laurea in Ingegneria Energetica
Geometria - A.A. 2015-2016
Foglio n.26 – Affinità e isometrie
prof. Cigliola

Esercizio 1. Classificare le seguenti trasformazioni del piano (stabilisci se sono affinità, isometrie, rotazioni etc.) e interpreta la loro azione geometricamente:

(i) $f(x,y) = (1,-2)$

(ii) $f(x,y) = (2x,2x)$

(iii) $f(x,y) = (-\frac{1}{3}x, -\frac{1}{3}y)$

(iv) $f(x,y) = (x+1, y-3)$

(v) $f(x,y) = (y,x)$

(vi) $f(x,y) = (-x,-y)$

(vii) $f(x,y) = (x,-y)$

(viii) $f(x,y) = (2x+y, 2x+y)$

(ix) $f(x,y) = (\frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}y,\ \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y)$

(x) $f(x,y) = (\frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y + 1,\ \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y - 2)$

Esercizio 2. Siano date le affinità $f(x,y) = (x+y-1, 2x+y+1)$ e $g(x,y) = (x+y+1, x-y)$. Calcolare le equazioni di $f \circ g$ e di $g \circ f$ e stabilire se sono uguali.

Esercizio 3. Dimostrare che la composizione di due rotazioni è una rotazione e che l'inversa di una rotazione è un'inversa.

Esercizio 4. Dimostrare che la composizione di due traslazioni è una traslazione e che l'inversa di una traslazione è una traslazione.

Esercizio 5. Data un'affinità f, si dice che P è un punto fisso per f se $f(P) = P$. Calcolare i punti fissi delle affinità (e delle isometrie) dell'Esercizio 1.

Esercizio 6. Data le affinità f e g dell'Esercizio 2, calcolare i trasformati sotto la loro azione del punto $P(2,-1)$, della retta $r:\ x - 2y + 1 = 0$ e della conica $\mathscr{C}$: $x^2 - y^2 + 2xy - x + y - 1 = 0$

Esercizio 7. Si consideri la base $\mathscr{B}'$ di $\mathbb{R}^3$ costituita dai vettori

$$v_1 = (1,-1,1) \qquad v_2 = (1,0,1) \qquad v_3 = (0,1,1).$$

Siano dati gli endomorfismi F, G e H di $\mathbb{R}^3$ tali che F sia associato alla matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ rispetto alla base canonica $\mathscr{B}$ di $\mathbb{R}^3$, $G(x,y,z) = (x+y, y+z, x+z)$, per ogni $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, e H è tale che

$$H(v_1) = v_1 - v_2 \qquad H(v_2) = v_1 \qquad H(v_3) = v_1 + v_2 + v_3.$$

(i) Calcolare la matrice associata rispetto alla base canonica $\mathscr{B}$ alle applicazioni $F \circ G$, $G \circ F$, $F \circ G \circ H$ e $F^2 \circ G \circ H^3$.

(ii) Calcolare la matrice associata rispetto alla base $\mathscr{B}'$ alle applicazioni $F \circ H$, $H \circ F$ e $F \circ G \circ H$.

(iii) Calcolare gli autovalori di F^{10}, di G^{100} e di H^{-2}.

(iv) Scrivere esplicitamente le equazioni di $F \circ G$, $G \circ F$, $F \circ G \circ H$ e $H \circ G \circ F$.

(v) Stabilire se $F \circ G = G \circ F$ e se $F^2 = G^2$.

Esercizio 8. Scrivere le equazioni della rotazione del piano di 45° attorno all'origine in senso orario.

Esercizio 9. Siano date ρ_1 la rotazione di $\frac{\pi}{3}$ attorno all'origine e ρ_2 la rotazione di $\frac{\pi}{4}$ anch'essa attorno all'origine. Scrivere le equazioni della trasformazione composta $\rho = \rho_2 \circ \rho_1$ ed interpretare geometricamente il risultato ottenuto. Classificare ρ (dire se ρ è un'affinità, una trasformazione lineare, una isometria).

Esercizio 10. Sia σ la simmetria rispetto alla retta $x = 1$ e sia τ_v la traslazione di vettore $v = (0, 2)$. Determinare le equazioni di $\sigma \circ \tau_v$ e di $\tau_v \circ \sigma$ e classificarle. Descrivere geometricamente queste due trasformazioni e verificare che $\sigma \circ \tau_v = \tau_v \circ \sigma$.

Esercizio 11. Scrivere le equazioni dell'isometria che manda l'origine nel punto $O'(-1, 2)$ e che ruota gli assi cartesiani di 60° in senso antiorario.

Esercizio 12. Classificare e descrivere geometricamente le seguenti trasformazioni

(i) $\Psi : \begin{cases} x' = \frac{1}{2}\,x \\ y' = \frac{1}{2}\,y \end{cases}$

(ii) $\Psi : \begin{cases} x' = 2\,x + 1 \\ y' = 2\,y + 1 \end{cases}$

(iii) $\Psi : \begin{cases} x' = \frac{\sqrt{2}}{2}\,x - \frac{\sqrt{2}}{2}y - 1 \\ y' = \frac{\sqrt{2}}{2}\,x + \frac{\sqrt{2}}{2}y + 3 \end{cases}$

(iv) $\Psi : \begin{cases} x' = x + 2 \\ y' = y - 2 \end{cases}$

(v) $\Psi : \begin{cases} x' = y + 2 \\ y' = x - 2 \end{cases}$

(vi) $\Psi : \begin{cases} x' = \frac{\sqrt{3}}{2}\,x + \frac{1}{2}y - 1 \\ y' = -\frac{1}{2}\,x + \frac{\sqrt{3}}{2}y + 3 \end{cases}$

Esercizio 13. Calcolare i trasformati dei punti $O(0, 0)$ e $P(1, -2)$ sotto l'azione delle trasformazioni dell'Esercizio 12.

Esercizio 14. Calcolare la trasformata della retta $r :\ x - y + 2 = 0$ sotto l'azione delle trasformazioni dell'Esercizio 12.

Esercizio 15. Siano date le rette $r:\ x+y+1=0$ ed $s:\ x-y+2=0$, la trasformazione $\varphi: \begin{cases} x' = \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y + 1 \\ y' = \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y - 1 \end{cases}$ ed i punti $A(1,1)$, $B(1,-2)$ e $C(2,2)$.

(i) Classificare φ.

(ii) Determinare le trasformate $\varphi(r)$ e $\varphi(s)$ di r e s rispettivamente sotto l'azione di φ.

(iii) Detto P il punto di intersezione tra r ed s, verificare che $\varphi(r) \cap \varphi(s) = \varphi(P)$.

(iv) Calcolare area e perimetro del triangolo di vertici $\varphi(A)$, $\varphi(B)$ e $\varphi(C)$.