Sapienza Università di Roma
Corso di laurea in Ingegneria Energetica
Geometria - A.A. 2015-2016
Foglio n.24 – Teorema spettrale
prof. Cigliola

Esercizio 1. Sia F l'endomorfismo di $\mathbb{R}^2$ associato alla matrice $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ rispetto alla base canonica.

(i) Scrivere l'espressione generale di F.

(ii) Usando la definizione data, verificare che F è un endomorfismo simmetrico.

(iii) Diagonalizzare F rispetto ad una base ortonormale di $\mathbb{R}^2$ di suoi autovettori.

(iv) Determinare, se esistono, una base ortonormale di $\operatorname{Ker} F$ e di $\operatorname{Im} F$.

Esercizio 2. Sia F l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ associato alla matrice $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 3 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ rispetto alla base canonica.

(i) Scrivere l'espressione generale di F.

(ii) Usando la definizione data, verificare che F è un endomorfismo simmetrico.

(iii) Diagonalizzare F rispetto ad una base ortonormale di $\mathbb{R}^2$ di autovettori per F.

(iv) Determinare, se esistono, una base ortonormale di $\operatorname{Ker} F$ e di $\operatorname{Im} F$.

Esercizio 3. Costruire, se possibile, un endomorfismo simmetrico di $\mathbb{R}^2$ con autovalori 1 e -2 e che abbia come autospazi ad essi associati i sottospazi generati rispettivamente da $(1,-1)$ e $(2,0)$.

Esercizio 4. Costruire, se esiste, un endomorfismo simmetrico di $\mathbb{R}^2$ con autovalori 1 e -2 e che abbia come autospazi ad essi associati i sottospazi generati rispettivamente da $(1,-1)$ e $(2,2)$.

Esercizio 5. Costruire, se esiste, un endomorfismo simmetrico di $\mathbb{R}^3$ con autovalori -1 e 3 e che abbia come autospazi ad essi associati rispettivamente $\mathscr{L}((2,2,2))$ e $\mathscr{L}((1,-1,0),(2,-1,3))$.

Esercizio 6. Costruire, se esiste, un endomorfismo simmetrico di $\mathbb{R}^3$ con autovalori 1 e -1 e che abbia come autospazi ad essi associati rispettivamente $\mathscr{L}((2,2,2))$ e $\mathscr{L}((1,-1,0),(0,-2,2))$.

Esercizio 7. Si consideri l'endomorfismo $F:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tale che

$$F(x,y) = (2x-y,-x+2y).$$

(i) Determinare la matrice associata ad F rispetto alla base canonica.

(ii) Verificare che F è un endomorfismo simmetrico.

(iii) Diagonalizzare F rispetto ad una base ortonormale di $\mathbb{R}^2$ di suoi autovettori.

Esercizio 8. Si consideri l'endomorfismo $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che

$$F(x, y) = (2x - y + 2z,\ -x - 2y + z,\ 2x + y + 2z).$$

(i) Determinare la matrice associata ad F rispetto alla base canonica.

(ii) Verificare che F è un endomorfismo simmetrico.

(iii) Diagonalizzare F rispetto ad una base ortonormale di autovettori per F.

(iv) Determinare, se esistono, una base ortonormale di $\operatorname{Ker} F$ e di $\operatorname{Im} F$.

Esercizio 9. Sia F l'endomorfismo di $\mathbb{R}^4$ associato alla matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ rispetto alla base canonica.

(i) Calcolare $F(x, y, z, t)$, al variare di $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$.

(ii) Stabilire se F è un endomorfismo simmetrico.

(iii) Diagonalizzare F rispetto ad una base ortonormale di suoi autovettori.

(iv) Determinare, se esistono, una base ortonormale di $\operatorname{Ker} F$ e di $\operatorname{Im} F$.

Esercizio 10. Sia W un sottospazio vettoriale non banale di $\mathbb{R}^n$ e sia $W^\perp$ il suo complemento ortogonale. È noto che ogni vettore $v \in \mathbb{R}^n$ può essere scritto come $v = w + w'$, dove $w \in W$ e $w' \in W^\perp$. Ha senso allora definire l'applicazione $P_W : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, detta la proiezione ortogonale da $\mathbb{R}^n$ su W, tale che $P_W(v) = w$. Dimostrare che P_W è un endomorfismo simmetrico di $\mathbb{R}^n$. Determinare inoltre $\operatorname{Im} P_W$ e $\operatorname{Ker} P_W$ e dire se sono spazi complementari.

Esercizio 11. Sia data la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. Trovare, se possibile, una matrice ortogonale C ed una matrice diagonale D tali che $D = C^T AC$.

Esercizio 12. Sia data la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Trovare, se possibile, una matrice ortogonale C ed una matrice diagonale D tali che $D = C^T AC$.

Esercizio 13. Costruire una matrice ortogonale di ordine 2 che contiene la riga $(\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{1}{3}})$.

Esercizio 14. Costruire una matrice ortogonale di ordine 3 che contiene la colonna $(\sqrt{\frac{1}{5}}, \sqrt{\frac{2}{5}}, \sqrt{\frac{2}{5}})$.

Esercizio 15. Siano A e B due matrici ortogonali. Provare che anche AB è una matrice ortogonale.

Esercizio 16. Sia $W = L((1,1,0,1),(0,0,0,1)) \subseteq \mathbb{R}^4$. Determinare una base di $W^\perp$. Scrivere la matrice canonica A associata alla proiezione ortogonale $P_W : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ di $\mathbb{R}^4$ su W. Stabilire se A è diagonalizzabile e, in caso affermativo, diagonalizzarla rispetto ad una base di autovettori.

Esercizio 17. Sia dato $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2z = 0\}$.

(i) Trovare una base ortonormale di U.

(ii) Determinare $U^\perp$ e fornire sue equazioni cartesiane e parametriche.

(iii) Determinare la proiezione ortogonale di $(1,-2,-1)$ su U.

(iv) Decomporre il vettore $(1,2,1)$ secondo U e $U^\perp$.

(v) Trovare, se possibile, un endomorfismo simmetrico che ha U e $U^\perp$ come autospazi associati rispettivamente agli autovalori 0 e -1.

Esercizio 18. Si considerino i vettori $v_1 = (1,2,0,0)$ e $v_2 = (-1,0,0,1)$ di $\mathbb{R}^4$. Si definiscano $W_1 = \{v \in \mathbb{R}^4 \mid v \cdot v_1 = 0\}$ e $W_2 = \{v \in \mathbb{R}^4 \mid v \cdot v_2 = 0\}$.

(i) Determinare una base ortonormale e la dimensione di W_1 e di W_2.

(ii) Determinare una base ortonormale e la dimensione di $W_1^\perp$ e di $W_2^\perp$.

(iii) Stabilire se W_1 e W_2 sono a somma diretta.

(iv) Determinare una base ortonormale e la dimensione di $W_1 + W_2$ e di $W_1 \cap W_2$.

(v) Determinare la proiezione ortogonale del vettore v_1 su W_1, W_2, W_1+W_2 e $W_1 \cap W_2$

(vi) Stabilire se esiste un endomorfismo simmetrico di $\mathbb{R}^4$ che abbia W_1 e W_2 come autospazi.

Esercizio 19. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo tale che $f(x,y,z) = (x-z, 0, z-x)$.

(i) Verificare che f è simmetrico.

(ii) Determinare una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ di autovettori di f.

(iii) Calcolare la dimensione di $\mathrm{Ker}(f)$ e di $\mathrm{Im}(f)^\perp$.

Esercizio 20. Sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'endomorfismo tale che $f(x,y,z,t) = (x, y+z, y+z, t)$.

(i) Verificare che f è simmetrico.

(ii) Determinare una base ortonormale di $\mathbb{R}^4$ di autovettori di f.

(iii) Calcolare la dimensione ed una base di $\mathrm{Ker}(f)^\perp$ e di $\mathrm{Im}(f)^\perp$.

Esercizio 21. Sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'endomorfismo tale che

$$f(e_1) = 2e_1 + 2e_3, \quad f(e_2) = 4e_2, \quad f(e_3) = 2e_1 + 2e_3, \quad f(e_4) = 4e_4,$$

dove $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ è la base canonica di $\mathbb{R}^4$.

(i) Verificare che f è simmetrico.

(ii) Determinare una base ortonormale di $\mathbb{R}^4$ di autovettori di f.

(iii) Calcolare la dimensione ed una base di $\mathrm{Ker}(f)$ e di $\mathrm{Im}(f)^\perp$.

(iv) Stabilire se $\mathrm{Ker}(f)$ e di $\mathrm{Im}(f)$ sono a somma diretta.