Sapienza Università di Roma
Corso di laurea in Ingegneria Energetica
Geometria - A.A. 2015-2016
Foglio n.21 – Prodotto vettoriale
prof. Cigliola

Esercizio 1. Siano dati $a \in \mathbb{R}$ ed i vettori $u = \vec{\imath} + (a-1)\vec{\jmath} + (a+1)\vec{k}$, $v = a\vec{\imath} + 2a\vec{\jmath} + \vec{k}$ e $w = 2\vec{\imath} + (a+3)\vec{\jmath} + 2a\vec{k}$ di $\mathbb{R}^3$. Determinare i valori di a per cui:

(i) u è parallelo a $3\vec{\imath} - 3\vec{\jmath} + 3\vec{k}$;

(ii) w è parallelo a $\vec{\imath} + \vec{\jmath} - \vec{k}$;

(iii) $\|u\| = 2$;

(iv) $u // v$;

(v) $u \perp v$;

(vi) u, v e w è una base ortogonale di $\mathbb{R}^3$;

(vii) $v \wedge w = \vec{0}$;

(viii) $v \wedge w$ è parallelo a $18\vec{\imath} - 18\vec{\jmath} + 54\vec{k}$;

(ix) v è complanare con $\vec{\imath} + \vec{\jmath}$ e $\vec{\jmath} + \vec{k}$;

(x) $u \wedge v \cdot w = 0$.

Esercizio 2. Siano v e w due vettori di $\mathbb{R}^2$. Si supponga che $v \wedge w \cdot u = 0$, per ogni $u \in \mathbb{R}^2$. Cosa si può dedurre su v e w?

Esercizio 3. Sia dato in $\mathbb{R}^3$ il vettore $v = (2, 1, -1)$. Si consideri l'applicazione $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ che ad ogni $u \in \mathbb{R}^3$ associa $F(u) = u \wedge v$.

(i) Dimostrare che F è un endomorfismo di $\mathbb{R}^3$.

(ii) Stabilire se F è simmetrico.

(iii) Determinare se F è un automorfismo e calcolare $\operatorname{Ker} F$ ed $\operatorname{Im} F$.

(iv) Trovare autovalori e autospazi di F e stabilire se esso è diagonalizzabile.

Esercizio 4. Sia dato in $\mathbb{R}^4$ il vettore $v = (-2, -1, 1, 2)$. Si consideri l'applicazione $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ che ad ogni $u \in \mathbb{R}^4$ associa $F(u) = u \cdot v$.

(i) Dimostrare che F è un'applicazione lineare.

(ii) Calcolare $\operatorname{Ker} F$ ed $\operatorname{Im} F$.

Esercizio 5. Siano dati i vettori di $\mathbb{R}^3$ $u = (1, 1, 0)$ e $v = (2, -1, 1)$. Risolve l'equazione vettoriale $u \wedge x = u \wedge v$ ed interpretare geometricamente il risultato ottenuto.

Esercizio 6. Siano dati i vettori di $\mathbb{R}^3$ $u = (1, 1, 0)$ e $v = (2, -1, 1)$. Risolve l'equazione vettoriale $u \wedge x = v \wedge 2u$ ed interpretare geometricamente il risultato ottenuto.

Esercizio 7. Sia $a \in \mathbb{R}$ e siano $u = (a, 1, -2)$, $v = (1, 0, -1)$, $w = (2, -1, 3)$ e $t = (1, 0, 2)$. Per quali valori di a il vettore t è ortogonale a $\|u\| v \wedge w - (u \cdot u) u \wedge w$?

Esercizio 8. Siano u, v e w vettori non complanari di $\mathbb{R}^3$. Calcolare la dimensione dei sottospazi generati da:

(i) $\{\, u,\ v,\ (u \wedge v \cdot w) w \,\}$;

(ii) $\{\, u,\ v,\ (u + v) \wedge (u - v) \,\}$;

(iii) $\{\, u,\ u + v,\ u \wedge (u + v) \,\}$;

(iv) $\{\, u + (u \wedge v),\ v + (u \wedge v),\ u - v \,\}$;

(v) $\{\, u + (u \wedge v),\ v + (v \wedge u),\ u - v \,\}$;

(vi) $\{\, u \wedge v,\ u \wedge w,\ w \wedge v \,\}$.

Esercizio 9. Rappresentare graficamente, calcolare l'area e il perimetro del quadrilatero $ABCD$ di vertici

$$A(5,2) \quad B(-2,5) \quad C(-4,-3) \quad D(-1,2).$$

Esercizio 10. Sia D il punto in cui la retta $r: \ 2x - 3y + 2 = 0$ interseca la retta passante per $A(-3, 2)$ e $B(1, -2)$. Condurre da D la retta s perpendicolare ad $\overrightarrow{AB}$ e sia C il punto in cui si intersecano s e la retta per B parallela all'asse y. Calcolare l'area del triangolo ABC.

Esercizio 11. Dimostrare che quattro punti A, B, C, D sono complanari se e solo se

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AD} = 0$$

Esercizio 12. Calcolare il volume di un parallelepipedo di dimensioni a, b e c utilizzando gli argomenti visti a lezione.