Sapienza Università di Roma – Corso di laurea in Ingegneria Elettrotecnica
Geometria - A.A. 2018-2019
Foglio n.20 – Piano euclideo

Esercizio 1. Un triangolo ABC è isoscele sulla base AB ed ha il vertice C sulla retta $r:\ x+y=1$. Calcolare il vertice C e l'area del triangolo sapendo che $A=(2,0)$ e $B=(4,6)$.

[Il vertice C è dato dall'intersezione della retta r e della retta r' perpendicolare ad AB, passante per il punto medio $M(3,3)$ di AB. Si trova $r':\ x+3y-12=0$ e $C(\frac{9}{2},\frac{11}{2})$. Si ha poi che la base del triangolo misura $AB=2\sqrt{10}$ e l'altezza $CM=\frac{\sqrt{34}}{2}$, da cui $\mathcal{A}=\sqrt{85}$.]

Esercizio 2. Trovare l'equazione della retta passante per il punto di intersezione delle rette $3x-y+7=0$ e $y=x+5$ e perpendicolare alla retta $2x-4y-1=0$.

Esercizio 3. Sono dati i punti $A(-2,1)$ e $B(-3,3)$. Trovare sull'asse delle ascisse il punto P equidistante da A e B.

[Si tratta di intersecare l'asse r del segmento AB con l'asse x. Si trova $r:\ 2x-4y+13=0$ e $P(-\frac{13}{2},0)$.]

Esercizio 4. Un quadrato $ABCD$ ha un vertice in $A(1,2)$ e il lato BC è contenuto nella retta $r:\ 4x+16y+16=0$. Calcolare tutti i vertici del quadrato, il suo perimetro e la sua area.

Esercizio 5. Sia D il punto in cui la retta $r:\ 2x-3y+2=0$ interseca la retta passante per $A(-3,2)$ e $B(1,-2)$. Condurre da D la retta s perpendicolare ad $\overrightarrow{AB}$ e sia C il punto in cui si intersecano s e la retta per B parallela all'asse y. Calcolare l'area del triangolo ABC.

Esercizio 6. Trovare la distanza di $P(2,-3)$ dalla retta $4x-3y+7=0$. [$d=\frac{24}{5}$]

Esercizio 7. Costruire un rombo di lato 4 sistemando i suoi vertici sulle rette perpendicolari $r:\ x-2y+3=0$ ed $s:\ 2x+y-10=0$.

[Scegliamo a caso un punto su r, distante da s meno di 4 e che non sia il punto di intersezione tra r ed s. Esso sarà il primo vertice A. Si prenda ad esempio $A(1,2)$. I vertici B e D saranno dati dall'intersezione della retta s e la circonferenza di centro A e raggio 4. Abbiamo $B(\frac{17-2\sqrt{11}}{5},\frac{16+4\sqrt{11}}{5})$ e $D(\frac{17+2\sqrt{11}}{5},\frac{16-4\sqrt{11}}{5})$. Il punto C è dato chiudendo il quadrilatero a parallelogramma: $C=B+D-A=(\frac{29}{5},\frac{22}{5})$.]

Esercizio 8. Calcolare l'ampiezza degli angoli compresi tra le rette $r:\ x-2y+5=0$ e $s:\ x+y-\pi=0$.

[Due versori direzionali sono $v=(\frac{2}{\sqrt{5}},\frac{1}{\sqrt{5}})$ e $w=(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}})$. Il loro prodotto scalare dà il coseno dei due angoli (tra loro supplementari) formati dalle due rette: $cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{10}}$. Pertanto i due angoli sono $\alpha=\arccos\frac{1}{\sqrt{10}}$ e $\pi-\alpha$.]

Esercizio 9. Determinare tutti i punti equidistanti da $A(2,-1)$ e da $B(1,3)$.

[Si ottiene l'asse del segmento AB: $d(A,P)=d(B,P)$. Da cui, semplificando, $r:\ 2x-8y-5=0$.]

Esercizio 10. Calcolare gli angoli compresi tra una retta r di parametri direttori $(2,1)$ e la retta r' di equazione $x+3y-1=0$.

Esercizio 11. Determinare la circonferenza passante per i punti $O(0,0)$, $A(1,2)$ e $B(2,1)$.
[Se la circonferenza cercata è $\mathcal{C}:\ x^2+y^2+ax+by+c=0$, si deve risolvere il sistema lineare $\begin{cases} c=0 \\ 1+4+a+2b=0 \\ 4+1+2a+b=0 \end{cases}$ da cui $\mathcal{C}:\ x^2+y^2+\frac{5}{3}x+\frac{4}{3}y=0$.]

Esercizio 12. Determinare la circonferenza con un diametro di estremi $A(1,2)$ e $B(2,1)$.

Esercizio 13. Determinare, se esiste, la circonferenze passante per i punti $O(1,1)$, $A(2,2)$ e $B(-1,-1)$.

Esercizio 14. Dato il punto $A(1,-1)$ e la retta $r:\ x-y-5=0$, determinare

(i) la proiezione ortogonale di A su r;

(ii) la distanza di A da r;

(iii) il simmetrico di A rispetto ad r.

Esercizio 15. Dati i punti $A(1,0)$, $B(3,2)$ e $C(-2,1)$,

(i) determinare i punti equidistanti da A e da B;

(ii) determinare i punti equidistanti da A, B e C;

(iii) calcolare l'area del triangolo ABC;

(iv) calcolare il perimetro del triangolo ABC;

(v) calcolare i coseni degli angoli del triangolo ABC.

Esercizio 16. Siano dati $A(1,-1)$ e $B(2,2)$. Determinare i punti P del piano tali che $\overrightarrow{AP}\perp\overrightarrow{BP}$. [Si trova la circonferenza di diametro AB.]

Esercizio 17. Determinare l'insieme dei punti del piano che vedono sotto un angolo retto il segmento di estremi $A(2,1)$ e $B(-2,2)$.
[Si ottiene la circonferenza di diametro AB.]

Esercizio 18. Determinare l'insieme dei punti del piano che vedono sotto un angolo di $30°$ il segmento di estremi $A(2,0)$ e $B(-2,0)$.

Esercizio 19. Determinare la circonferenza di centro $(2,-3)$ e raggio 4.
[$(x-2)^2+(y+3)^2=16$]

Esercizio 20. Per quali valori di k la seguente equazione rappresenta una circonferenza?

$$x^2+y^2-3x+y+k=0$$

[$k<\frac{10}{4}$]

Esercizio 21. Trovare la circonferenza tangente nell'origine alla retta $r:\ y-3x=0$ ed avente il centro nella retta $s:\ 2x+y-1=0$.

[Ricordiamo che la retta tangente ad una circonferenza è perpendicolare al raggio nel punto di tangenza. Detta allora t la retta perpendicolare ad r e passante per l'origine, si ha che il centro della circonferenza è l'intersezione di s e t. Si ottiene $t:\ x + 3y = 0$ e $C(-\frac{3}{5}, \frac{1}{5})$. Il raggio è dato dalla distanza di C dall'origine: $R = \sqrt{\frac{2}{5}}$.]

Esercizio 22. Sono dati nel piano i punti

$$A(-1,1) \qquad B(2,1) \qquad C(1,2)$$

(i) Determinare il perimetro del triangolo ABC.

(ii) Calcolare il centro della circonferenza circoscritta ad ABC.

(iii) Calcolare il raggio della circonferenza inscritta ad ABC.

(iv) Determinare la circonferenza passante per A, B, C.