

Sapienza Università di Roma – Corso di laurea in Ingegneria Energetica
Geometria - A.A. 2016-2017 – prof. Cigliola
Foglio n.20 – Piano euclideo

Esercizio 1. Un triangolo ABC è isoscele sulla base AB ed ha il vertice C sulla retta $r : x + y = 1$. Calcolare il vertice C e l'area del triangolo sapendo che $A = (2, 0)$ e $B = (4, 6)$.

[Il vertice C è dato dall'intersezione della retta r e della retta r' perpendicolare ad AB , passante per il punto medio $M(3, 3)$ di AB . Si trova $r' : x + 3y - 12 = 0$ e $C(\frac{9}{2}, \frac{11}{2})$. Si ha poi che la base del triangolo misura $AB = 2\sqrt{10}$ e l'altezza $CM = \frac{\sqrt{34}}{2}$, da cui $\mathcal{A} = \sqrt{85}$.]

Esercizio 2. Trovare l'equazione della retta passante per il punto di intersezione delle rette $3x - y + 7 = 0$ e $y = x + 5$ e perpendicolare alla retta $2x - 4y - 1 = 0$.

Esercizio 3. Sono dati i punti $A(-2, 1)$ e $B(-3, 3)$. Trovare sull'asse delle ascisse il punto P equidistante da A e B .

[Si tratta di intersecare l'asse r del segmento AB con l'asse x . Si trova $r : 2x + 8y - 13 = 0$ e $P(\frac{13}{2}, 0)$.]

Esercizio 4. Un quadrato $ABCD$ ha un vertice in $A(1, 2)$ e il lato BC è contenuto nella retta $r : 4x + 16y + 16 = 0$. Calcolare tutti i vertici del quadrato, il suo perimetro e la sua area sapendo che i suoi vertici hanno coordinate intere.

[Il vertice B è dato dall'intersezione di r con r' , la perpendicolare ad AB passante per A . Si trova $r' : x + 2y = 0$ e $B(4, -2)$. Il punto $C(x, y)$ è dato dalle condizioni $\begin{cases} d(B, C) = d(A, B) = 5 \\ C \in r. \end{cases}$ Si ha $\begin{cases} x^2 + y^2 + 8x - 4y = 5 \\ 4x + 16y + 16 = 0 \end{cases}$ Si trovano le soluzioni $x = 0$ e $x = -\frac{152}{17}$, che non è accettabile. Allora $C(0, -1)$. Infine D è dato chiudendo $ABCD$ ad un parallelogramma. Deve essere $D = C - B + A = (-3, 3)$. Infine, $AB = 5$, il perimetro vale 20 e l'area 25.]

Esercizio 5. Sia D il punto in cui la retta $r : 2x - 3y + 2 = 0$ interseca la retta passante per $A(-3, 2)$ e $B(1, -2)$. Condurre da D la retta s perpendicolare ad \overrightarrow{AB} e sia C il punto in cui si intersecano s e la retta per B parallela all'asse y . Calcolare l'area del triangolo ABC .

Esercizio 6. Trovare la distanza di $P(2, -3)$ dalla retta $4x - 3y + 7 = 0$. [$d = \frac{24}{5}$]

Esercizio 7. Costruire un rombo di lato 4 sistemando i suoi vertici sulle rette perpendicolari $r : x - 2y + 3 = 0$ ed $s : 2x + y - 10 = 0$.

[Scegliamo a caso un punto su r , distante da s meno di 4 e che non sia il punto di intersezione tra r ed s . Esso sarà il primo vertice A . Si prenda ad esempio $A(1, 2)$. I vertici B e D saranno dati dall'intersezione della retta s e la circonferenza di centro A e raggio 4. Abbiamo $B(\frac{17-2\sqrt{11}}{5}, \frac{16+4\sqrt{11}}{5})$ e $D(\frac{17+2\sqrt{11}}{5}, \frac{16-4\sqrt{11}}{5})$. Il punto C è dato chiudendo il quadrilatero a parallelogramma: $C = B + D - A = (\frac{29}{5}, \frac{22}{5})$.]

Esercizio 8. Calcolare l'ampiezza degli angoli compresi tra le rette $r : x - 2y + 5 = 0$ e $s : x + y - \pi = 0$.

[Due versori direzionali sono $v = (\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}})$ e $w = (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$. Il loro prodotto scalare dà il coseno dei due angoli (tra loro supplementari) formati dalle due rette: $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{10}}$. Pertanto i due angoli sono $\alpha = \arccos \frac{1}{\sqrt{10}}$ e $\pi - \alpha$.]

Esercizio 9. Determinare tutti i punti equidistanti da $A(2, -1)$ e da $B(1, 3)$.

[Si ottiene l'asse del segmento AB : $d(A, P) = d(B, P)$. Da cui, semplificando,
 $r: 2x - 8y - 5 = 0$.]

Esercizio 10. Calcolare gli angoli compresi tra una retta r di parametri direttori $(2, 1)$ e la retta r' di equazione $x + 3y - 1 = 0$.

Esercizio 11. Determinare la circonferenza passante per i punti $O(0, 0)$, $A(1, 2)$ e $B(2, 1)$.

[Se la circonferenza cercata è $\mathcal{C}: x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$, si deve risolvere il sistema

$$\text{lineare } \begin{cases} c = 0 \\ 1 + 4 + a + 2b = 0 \\ 4 + 1 + 2a + b = 0 \end{cases} \quad \text{da cui } \mathcal{C}: x^2 + y^2 + \frac{5}{3}x + \frac{4}{3}y = 0.]$$

Esercizio 12. Determinare la circonferenza con un diametro di estremi $A(1, 2)$ e $B(2, 1)$.

Esercizio 13. Determinare, se esiste, la circonferenze passante per i punti $O(1, 1)$, $A(2, 2)$ e $B(-1, -1)$.

Esercizio 14. Dato il punto $A(1, -1)$ e la retta $r: x - y - 5 = 0$, determinare

- (i) la proiezione ortogonale di A su r ;
- (ii) la distanza di A da r ;
- (iii) il simmetrico di A rispetto ad r .

Esercizio 15. Dati i punti $A(1, 0)$, $B(3, 2)$ e $C(-2, 1)$,

- (i) determinare i punti equidistanti da A e da B ;
- (ii) determinare i punti equidistanti da A , B e C ;
- (iii) calcolare l'area del triangolo ABC ;
- (iv) calcolare il perimetro del triangolo ABC ;
- (v) calcolare i coseni degli angoli del triangolo ABC .

Esercizio 16. Siano dati $A(1, -1)$ e $B(2, 2)$. Determinare i punti P del piano tali che $\vec{AP} \perp \vec{BP}$. [Si trova la circonferenza di diametro AB .]

Esercizio 17. Determinare l'insieme dei punti del piano che vedono sotto un angolo retto il segmento di estremi $A(2, 1)$ e $B(-2, 2)$.

[Si ottiene la circonferenza di diametro AB .]

Esercizio 18. Determinare l'insieme dei punti del piano che vedono sotto un angolo di 30° il segmento di estremi $A(2, 0)$ e $B(-2, 0)$.

Esercizio 19. Determinare la circonferenza di centro $(2, -3)$ e raggio 4.

$$[(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 16]$$

Esercizio 20. Per quali valori di k la seguente equazione rappresenta una circonferenza?

$$x^2 + y^2 - 3x + y + k = 0$$

$$[k < \frac{10}{4}]$$

Esercizio 21. Trovare la circonferenza tangente nell'origine alla retta $r : y - 3x = 0$ ed avente il centro nella retta $s : 2x + y - 1 = 0$.

[Ricordiamo che la retta tangente ad una circonferenza è perpendicolare al raggio nel punto di tangenza. Detta allora t la retta perpendicolare ad r e passante per l'origine, si ha che il centro della circonferenza è l'intersezione di s e t . Si ottiene $t : x + 3y = 0$ e $C(-\frac{3}{5}, \frac{1}{5})$. Il raggio è dato dalla distanza di C dall'origine: $R = \sqrt{\frac{2}{5}}$.]

Esercizio 22. Sono dati nel piano i punti

$$A(-1, 1) \qquad B(2, 1) \qquad C(1, 2)$$

- (i) Determinare il perimetro del triangolo ABC .
- (ii) Calcolare il centro della circonferenza circoscritta ad ABC .
- (iii) Calcolare il raggio della circonferenza inscritta ad ABC .
- (iv) Determinare la circonferenza passante per A, B, C .