Sapienza Università di Roma – Corso di laurea in Ingegneria Energetica
Geometria - A.A. 2016-2017 – prof. Cigliola
Foglio n.18 – Teorema spettrale

Esercizio 1. Sia F l'endomorfismo di $\mathbb{R}^2$ associato alla matrice $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ rispetto alla base canonica.

(i) Scrivere l'espressione generale di F. [$F(x,y) = (2x+3y, 3x-2y)$]

(ii) Usando la definizione data, verificare che F è un endomorfismo simmetrico.

(iii) Diagonalizzare F rispetto ad una base ortonormale di $\mathbb{R}^2$ di suoi autovettori.

[autovalori $\lambda = \pm\sqrt{13}$, $\mathcal{B} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{26-4\sqrt{13}}}(2-\sqrt{13},3),\ \frac{1}{\sqrt{26+4\sqrt{13}}}(2+\sqrt{13},3) \right\}$]

(iv) Determinare, se esistono, una base ortonormale di $\operatorname{Ker} F$ e di $\operatorname{Im} F$.

[F è invertibile, allora il nucleo è banale e l'immagine ha per base quella canonica.]

Esercizio 2. Sia F l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ associato alla matrice $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 3 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ rispetto alla base canonica.

(i) Scrivere l'espressione generale di F.

[$F(x,y,z) = (2x+3y+2z,\ 3x-2y+3z,\ 2x+3y+2z)$]

(ii) Usando la definizione data, verificare che F è un endomorfismo simmetrico.

(iii) Diagonalizzare F rispetto ad una base ortonormale di $\mathbb{R}^2$ di autovettori per F.

[autovalori $\lambda = 0, 1 \pm 3\sqrt{3}$,
$\mathcal{B} = \left\{ (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}),\ (\frac{1}{\sqrt{6-2\sqrt{3}}}, \frac{-1+\sqrt{3}}{\sqrt{6-2\sqrt{3}}}, \frac{1}{\sqrt{6-2\sqrt{3}}}),\ (\frac{1}{\sqrt{6+2\sqrt{3}}}, \frac{-1-\sqrt{3}}{\sqrt{6+2\sqrt{3}}}, \frac{1}{\sqrt{6+2\sqrt{3}}}) \right\}$]

(iv) Determinare, se esistono, una base ortonormale di $\operatorname{Ker} F$ e di $\operatorname{Im} F$.

[il primo vettore di $\mathcal{B}$ dà una base ortonormale del nucleo, i rimanenti due dell'immagine]

Esercizio 3. Costruire, se possibile, un endomorfismo simmetrico di $\mathbb{R}^2$ con autovalori 1 e -2 e che abbia come autospazi ad essi associati i sottospazi generati rispettivamente da $(1,-1)$ e $(2,0)$.

[non è possibile poiché i due vettori non sono ortogonali]

Esercizio 4. Costruire, se esiste, un endomorfismo simmetrico di $\mathbb{R}^2$ con autovalori 1 e -2 e che abbia come autospazi ad essi associati i sottospazi generati rispettivamente da $(1,-1)$ e $(2,2)$.

[$F(x,y) = (-\frac{x}{2} - \frac{3y}{2}, -\frac{3x}{2} - \frac{y}{2})$]

Esercizio 5. Costruire, se esiste, un endomorfismo simmetrico di $\mathbb{R}^3$ con autovalori -1 e 3 e che abbia come autospazi ad essi associati rispettivamente $\mathcal{L}((2,2,2))$ e $\mathcal{L}((1,-1,0),(2,-1,3))$.

[non esiste poiché i due spazi non sono ortogonali]

Esercizio 6. Costruire, se esiste, un endomorfismo simmetrico di $\mathbb{R}^3$ con autovalori 1 e -1 e che abbia come autospazi ad essi associati rispettivamente $\mathcal{L}((2,2,2))$ e $\mathcal{L}((1,-1,0),(0,-2,2))$.

Esercizio 7. Si consideri l'endomorfismo $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tale che

$$F(x,y) = (2x-y, -x+2y).$$

(i) Determinare la matrice associata ad F rispetto alla base canonica.

(ii) Verificare che F è un endomorfismo simmetrico.

(iii) Diagonalizzare F rispetto ad una base ortonormale di $\mathbb{R}^2$ di suoi autovettori.

Esercizio 8. Si consideri l'endomorfismo $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che

$$F(x,y) = (2x - y + 2z,\ -x - 2y + z,\ 2x + y + 2z).$$

(i) Determinare la matrice associata ad F rispetto alla base canonica.

(ii) Verificare che F è un endomorfismo simmetrico.

(iii) Diagonalizzare F rispetto ad una base ortonormale di suoi autovettori.

(iv) Determinare, se esistono, una base ortonormale di $\operatorname{Ker} F$ e di $\operatorname{Im} F$.

Esercizio 9. Sia F l'endomorfismo di $\mathbb{R}^4$ associato alla matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ rispetto alla base canonica.

(i) Calcolare $F(x,y,z,t)$, al variare di $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$.

(ii) Stabilire se F è un endomorfismo simmetrico.

(iii) Diagonalizzare F rispetto ad una base ortonormale di suoi autovettori.

(iv) Determinare, se esistono, una base ortonormale di $\operatorname{Ker} F$ e di $\operatorname{Im} F$.

Esercizio 10. Sia W un sottospazio vettoriale non banale di $\mathbb{R}^n$ e sia $W^\perp$ il suo complemento ortogonale. È noto che ogni vettore $v \in \mathbb{R}^n$ può essere scritto come $v = w + w'$, dove $w \in W$ e $w' \in W^\perp$. Ha senso allora definire l'applicazione $P_W : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, detta la proiezione ortogonale da $\mathbb{R}^n$ su W, tale che $P_W(v) = w$. Dimostrare che P_W è un endomorfismo simmetrico di $\mathbb{R}^n$. Determinare inoltre $\operatorname{Im} P_W$ e $\operatorname{Ker} P_W$ e dire se sono spazi complementari.

Esercizio 11. Sia data la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. Trovare, se possibile, una matrice ortogonale C ed una matrice diagonale D tali che $D = C^T A C$.

Esercizio 12. Sia data la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Trovare, se possibile, una matrice ortogonale C ed una matrice diagonale D tali che $D = C^T A C$.

Esercizio 13. Sia $W = L((1,1,0,1),(0,0,0,1)) \subseteq \mathbb{R}^4$. Determinare una base di $W^\perp$. Scrivere la matrice canonica A associata alla proiezione ortogonale $P_W : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ di $\mathbb{R}^4$ su W. Stabilire se A è diagonalizzabile e, in caso affermativo, diagonalizzarla rispetto ad una base di autovettori.

Esercizio 14. Sia dato $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2z = 0\}$.

(i) Trovare una base ortonormale di U.

(ii) Determinare $U^\perp$ e fornire sue equazioni cartesiane e parametriche.

(iii) Determinare la proiezione ortogonale di $(1,-2,-1)$ su U.

(iv) Decomporre il vettore $(1,2,1)$ secondo U e $U^\perp$.

(v) Trovare, se possibile, un endomorfismo simmetrico che ha U e $U^\perp$ come autospazi associati rispettivamente agli autovalori 0 e -1.

Esercizio 15. Si considerino i vettori $v_1 = (1,2,0,0)$ e $v_2 = (-1,0,0,1)$ di $\mathbb{R}^4$. Si definiscano $W_1 = \{v \in \mathbb{R}^4 \mid v \cdot v_1 = 0\}$ e $W_2 = \{v \in \mathbb{R}^4 \mid v \cdot v_2 = 0\}$.

(i) Determinare una base ortonormale e la dimensione di W_1 e di W_2.

(ii) Determinare una base ortonormale e la dimensione di $W_1^\perp$ e di $W_2^\perp$.

(iii) Stabilire se W_1 e W_2 sono a somma diretta.

(iv) Determinare una base ortonormale e la dimensione di $W_1 + W_2$ e di $W_1 \cap W_2$.

(v) Determinare la proiezione ortogonale del vettore v_1 su W_1, W_2, $W_1 + W_2$ e $W_1 \cap W_2$

(vi) Stabilire se esiste un endomorfismo simmetrico di $\mathbb{R}^4$ che abbia W_1 e W_2 come autospazi.

Esercizio 16. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo tale che $f(x, y, z) = (x - z, 0, z - x)$.

(i) Verificare che f è simmetrico.

(ii) Determinare una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ di autovettori di f.

(iii) Calcolare la dimensione di $\mathrm{Ker}(f)$ e di $\mathrm{Im}(f)^\perp$.

Esercizio 17. Sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'endomorfismo tale che $f(x, y, z, t) = (x, y + z, y + z, t)$.

(i) Verificare che f è simmetrico.

(ii) Determinare una base ortonormale di $\mathbb{R}^4$ di autovettori di f.

(iii) Calcolare la dimensione ed una base di $\mathrm{Ker}(f)^\perp$ e di $\mathrm{Im}(f)^\perp$.

Esercizio 18. Sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'endomorfismo tale che

$$f(e_1) = 2e_1 + 2e_3, \quad f(e_2) = 4e_2, \quad f(e_3) = 2e_1 + 2e_3, \quad f(e_4) = 4e_4,$$

dove $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ è una base ortonormale di $\mathbb{R}^4$.

(i) Verificare che f è simmetrico.

(ii) Determinare una base ortonormale di $\mathbb{R}^4$ di autovettori di f.

(iii) Calcolare la dimensione ed una base di $\mathrm{Ker}(f)$ e di $\mathrm{Im}(f)^\perp$.

(iv) Stabilire se $\mathrm{Ker}(f)$ e di $\mathrm{Im}(f)$ sono a somma diretta.

Esercizio 19. Per ciascuno dei seguenti polinomi a coefficienti reali, contare il numero di radici reali nulle, positive e negative ed il numero di radici complesse:

(i) $f(x) = x^4 - x^3 + 7x^2 - 1$

[Dalla regola dei segni si trova che il polinomio ha al più tre radici positive e una negativa, potrebbe quindi non avere radici complesse. Si ha che $f(0) = -1 < 0$, mentre $f(1) > 0$ e $f(-1) > 0$. Quindi f ha almeno una radice positiva ed esattamente una negativa. La derivata prima di f è $f'(x) = x(4x^2 - 3x + 14)$ che è strettamente crescente per $x > 0$. Allora f non può avere altre radici reali positive. Quindi f ha una radice reale positiva, una negativa e due complesse e coniugate.]

(ii) $f(x) = x^5 + \frac{1}{2}x^4 - x^3 + 3$

[Con la regola dei segni troviamo che f ha al più due radici positive ed al più una radice negativa. Di conseguenza ci sono almeno due radici complesse e coniugate. Siccome $f'(x) = 5x^4 + 2x^3 - 3x^2 = x^2(5x^2 + 2x - 3)$, si trova che f ha in $x_0 = \frac{3}{5}$ un punto di minimo locale in cui f assume valore positivo. Questo vuol dire che f ha una sola radice reale. Per deciderne il segno osserviamo che $f(0) = 3 > 0$ e $f(-2) < 0$. Allora f ha una sola radice reale negativa e quattro radici complesse e coniugate a due a due.]

(iii) $f(x) = 12x^6 + x^3 - 2x^2$

[Notiamo anzitutto che il polinomio ha due radici nulle. Dalla regola dei segni segue che f ha al più una radice positiva ed una negativa. Si calcola facilmente che $f(0) = -2 < 0$ e che $f(1) > 0$. Allora f ha una radice positiva ed essendo di grado pari, ha anche una radice negativa per il teorema di D'Alembert. Riassumendo, f ha due radici nulle, una positiva, una negativa e due complesse e coniugate.]

(iv) $f(x) = x^8 - x + 2$

[Dalla regola dei segni abbiamo che f ha al più due radici positive e che non ha radici negative. In particolare f ha almeno 6 radici complesse e coniugate. La derivata prima di f è $f'(x) = 8x^7 - 1$ che si annulla nel punto di minimo $x_0 = \frac{1}{\sqrt[7]{8}}$. Essendo $f(x_0) > 0$, f non può avere radici reali positive, allora ha otto radici complesse a due a due coniugate.]

(v) $f(x) = x^7 - x^6 + 2x^5 - x^4 + 2x^3 - 2x^2 + x + 1$

(vi) $f(x) = x^4 - 4x^3 + 16x - 16$

(vii) $f(x) = -x^5 + 5x^4 - 28x^2 + 32x$

Esercizio 20. Calcolare rango e segnatura delle seguenti forme quadratiche su $\mathbb{R}^4$:

(i) $Q(x,y,z,t) = x^2 - y^2 + zt + xt - 2zy$

(ii) $Q(x,y,z,t) = xy - xz + xt - yz + zt + 2yt$

(iii) $Q(x,y,z,t) = x^2 - yz - t^2$

(iv) $Q(x,y,z,t) = 3y^2 + xt$

(v) $Q(x,y,z,t) = -4xy + 2zt$

(vi) $Q(x,y,z,t) = x^2 + 2xy + y^2$

(vii) $Q(x,y,z,t) = 3x^2 - 2y^2 + xy - 4zt$

Esercizio 21. Si consideri la seguente applicazione $Q : \mathbb{R}_{\leqslant 2}[x] \to \mathbb{R}$ tale che

$$Q(ax^2 + bx + c) = 2ac + b^2.$$

(i) Determinare la forma bilineare polare di Q.

(ii) Calcolare la matrice canonica di Q.

(iii) Determinare una base diagonalizzante per Q.

(iv) Determinare una base di Sylvester per Q.

(v) Calcolare rango e segnatura di Q utilizzando la regola di Cartesio.

Esercizio 22. Si consideri la forma quadratica $Q : \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ tale che

$$Q\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix} = x_1y_1 - x_2y_3 - x_3y_3.$$

(i) Determinare la forma bilineare polare di Q.

(ii) Calcolare la matrice canonica di Q.

(iii) Determinare una base diagonalizzante per Q.

(iv) Determinare una base di Sylvester per Q.

(v) Calcolare rango e segnatura di Q utilizzando la regola di Cartesio.

Esercizio 23. Si consideri l'applicazione $b : \mathbb{R}_{\leqslant 2}[x] \times \mathbb{R}_{\leqslant 2}[x] \to \mathbb{R}$ tale che

$$b(f(x),\ g(x)) = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$$

(i) Verificare che b è un prodotto scalare.

(ii) Determinare la forma quadratica associata a b.

(iii) Calcolare la segnatura di Q e determinare una sua forma canonica di Sylvester.

Esercizio 24. Utilizzando la regola di Cartesio e il criterio dei minori principali, verificare che ponendo

$$b(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1y_1 + 2x_2y_2 - x_1y_2 - x_2y_1 + x_3y_3$$

si definisce un prodotto scalare su $\mathbb{R}^3$.

Esercizio 25. Utilizzando la regola di Cartesio e il criterio dei minori principali, verificare che ponendo

$$b(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1y_1 + 6x_2y_2 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + x_3y_3 - x_3y_3 - x_3y_2 + x_4y_4$$

si definisce un prodotto scalare su $\mathbb{R}^4$.