

Sapienza Università di Roma
Corso di laurea in Ingegneria Energetica
Geometria - A.A. 2015-2016
Foglio n.18 – Forme quadratiche
prof. Cigliola

Esercizio 1. Per ciascuna delle forme quadratiche su \mathbb{R}^3 seguenti calcolare la forma polare, una base diagonalizzante di Sylvester, rango e segnatura:

- (i) $Q(x, y, z) = xz + xy + yz$
- (ii) $Q(x, y, z) = 2xz - 2xy - 2yz$
- (iii) $Q(x, y, z) = x^2 - 2xz - y^2 - z^2$
- (iv) $Q(x, y, z) = -x^2 - 4xy + 3y^2 + 2z^2$
- (v) $Q(x, y, z) = 5x^2 + 3y^2 + xz$
- (vi) $Q(x, y, z) = 6xy$

Esercizio 2. Calcolare la segnatura delle forme quadratiche dell'esercizio precedente utilizzando il completamento dei quadrati.

Esercizio 3. Classificare le forme quadratiche dell'esercizio 1 (dire se sono indefinite, definite positive etc.).

Esercizio 4. Data la matrice A , trovare una matrice invertibile M tale che $M^T A M$ sia la forma canonica di Sylvester di A e calcolare la segnatura di A :

- (i) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$
- (ii) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$
- (iii) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$
- (iv) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Esercizio 5. Classificare le matrici dell'esercizio precedente (dire se sono indefinite, definite positive etc.).

Esercizio 6. Individuare tra le seguenti matrici quelle definite positive utilizzando il criterio dei minori principali:

$$(i) \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(ii) \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(iii) \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(iv) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(v) \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(vi) \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Esercizio 7. Al variare di k in \mathbb{R} , calcolare la segnatura della matrice: $\begin{pmatrix} k & 0 & 1 \\ 0 & k & 0 \\ 1 & 0 & k \end{pmatrix}$

Classificare il suo tipo al variare di k .

Esercizio 8. Al variare di k in \mathbb{R} , calcolare la segnatura della matrice: $\begin{pmatrix} k & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & k \end{pmatrix}$

Per $k = 3$ trovare una matrice invertibile M tale che $M^T A M$ sia la forma canonica di Sylvester di A .

Esercizio 9. Al variare di k in \mathbb{R} , calcolare la segnatura della matrice: $\begin{pmatrix} 2k & 0 & 1-k \\ 0 & k & 0 \\ 1-k & 0 & 2k \end{pmatrix}$.

Per quali valori di k essa risulta definita positiva?