Sapienza Università di Roma
Corso di laurea in Ingegneria Energetica
Geometria - A.A. 2015-2016
Foglio n.17 – Forme bilineari
prof. Cigliola

Esercizio 1. Provare che le seguenti applicazioni sono forme bilineari:

(i) $b : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tale che $b((x,y);(x',y')) = xx' - 2xy' + \frac{1}{2}yy'$

(ii) $b : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tale che $b((x,y,z);(x',y',z')) = xx' - 2yy' + zz'$

(iii) $b : \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \times \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ tale che $b(A;B) = \mathrm{tr}(AB^T - BA^T)$

(iv) $b : \mathbb{R}[x] \times \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}$ tale che $b(f,g) = f(0)g'(0) + f'(0)g(0)$, dove con f' si intende la derivata di f rispetto ad x.

(v) $b : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tale che $b((x_1,\dots,x_n),(y_1,\dots,y_n)) = (x_1 + \dots + x_n)(y_1 + \dots + y_n)$

Esercizio 2. Provare che le seguenti applicazioni non sono forme bilineari:

(i) $b : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tale che $b((x,y),(x',y')) = -xx' - xy' + 3$

(ii) $b : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tale che $b((x,y,z),(x',y',z')) = e^{xx'} - yy'$

(iii) $b : \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \times \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ tale che $b(A,\, B) = \det(A + B)$

(iv) $b : \mathbb{R}_{\leqslant 1}[x] \times \mathbb{R}_{\leqslant 1}[x] \to \mathbb{R}$ tale che $b(ax + \alpha,\ a'x + \alpha') = aa' + \alpha$

(v) $b : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tale che $b((x_1,\dots,x_n),(y_1,\dots,y_n)) = |x_1y_1 + \dots + x_ny_n|$

(vi) $b : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tale che $b((x_1,\dots,x_n),(y_1,\dots,y_n)) = \sqrt{x_1^2y_1^2 + \dots + x_n^2y_n^2}$

(vii) $b((x,y,z),(x',y',z')) = 1$

Esercizio 3. Determinare la matrice associata rispetto alla base $\{(1,1,1),(-1,0,1),(0,2,1)\}$, la matrice canonica e il rango di ciascuna delle seguenti forme bilineari su $\mathbb{R}^3$:

(i) $b((x,y,z),(x',y',z')) = xy' + yz' + zx'$

(ii) $b((x,y,z),(x',y',z')) = xy' + yz' - 2zx' + x'y + y'z - 2z'x$

(iii) $b((x,y,z),(x',y',z')) = xy' + yz' - zx'$

(iv) $b((x,y,z),(x',y',z')) = xx' + 2yx' - zz' + 2xz'$

(v) $b((x,y,z),(x',y',z')) = xx' + 2yy' - zz' - (xy' + x'y) + (zx' + x'z)$

(vi) $b((x,y,z),(x',y',z')) = yz' - y'z + xz' - x'z + xy' - yx'$

(vii) $b((x,y,z),(x',y',z')) = (x + y + z)(x' + y' + z')$

(viii) $b((x,y,z),(x',y',z')) = xy'$

Dire se le precedenti forme sono simmetriche o antisimmetriche.

Esercizio 4. Diagonalizzare le forme bilineari simmetriche dell'esercizio precedente.

Esercizio 5. Diagonalizzare le forme bilineari simmetriche su $\mathbb{R}^n$ associate alle seguenti matrici esplicitando la base diagonalizzante usata e la forma diagonale ad esse congruenti:

(i) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ con $n = 2$

(ii) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ con $n = 2$

(iii) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ con $n = 2$

(iv) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ con $n = 3$

(v) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ con $n = 3$

(vi) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ con $n = 3$

(vii) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ con $n = 3$

(viii) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ con $n = 4$

(ix) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ con $n = 4$

Esercizio 6. Si consideri al variare di k la forma bilineare su $\mathbb{R}^4$ definita da

$$b(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1y_1 + x_4y_4 + x_3y_1 + x_1y_3 + kx_4y_2 + kx_2y_4.$$

(i) Determinare il rango di b al variare di k.

(ii) Diagonalizzare b al variare di k.

(iii) Determinare al variare di k un sottospazio massimale che non contiene vettori isotropi.

Esercizio 7. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita su $\mathbb{R}$ e sia $b : V \times V \to \mathbb{R}$ una forma bilineare simmetrica. Sia infine U un sottospazio di V. Provare che le seguenti proprietà sono equivalenti:

(i) $U \cap U^{\perp} = \{ \mathbf{0}_V \}$

(ii) La restrizione di b a $U \times U$ è una forma bilineare non degenere

(iii) $U \oplus U^{\perp} = V$.

Esercizio 8. Si ponga $\{ e_1, e_2, e_3 \}$ la base canonica di $\mathbb{R}^3$. Determinare, se esiste, una forma bilineare su $\mathbb{R}^3$ tale che $b(e_1, e_1) = b(e_2, e_2) = b(e_3, e_3) = 1$ e tale che i vettori $e_1 + e_2$, $e_1 + e_3$ e $e_2 + e_3$ sono isotropi. Stabilire se una tale forma è simmetrica e in tal caso diagonalizzarla.

Esercizio 9. Determinare il complemento ortogonale di ciascuno dei sottospazi W di $\mathbb{R}^4$ sotto indicati rispetto alla forma bilineare b associata alla matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(i) $W = \mathscr{L}((1,2,0,1),(1,0,0,-1),(0,0,0,1))$

(ii) $W = \mathscr{L}((1,0,0,1),(0,0,0,-3))$

(iii) $W = \mathscr{L}((0,2,1,0),(0,-1,-1,0))$

(iv) $W = \mathbb{R}^4$

(v) $W = \mathscr{L}((0,0,0,5))$

(vi) $W = \mathscr{L}((0,0,7,0))$

Stabilire poi per quali di essi si ha che $W \oplus W^{\perp} = \mathbb{R}^4$. Determinare infine un sottospazio massimale di $\mathbb{R}^4$ su cui la restrizione di b sia non degenere.

Esercizio 10. Due sottospazi si dicono ortogonali se tutti i vettori dell'uno sono ortogonali a tutti i vettori dell'altro. Dimostrare che due sottospazi finitamente generati sono ortogonali se e solo se tutti i vettori di una base dell'uno sono ortogonali a tutti vettori di una base dell'altro.

Esercizio 11. Dire per quali valori di $a, b, c \in \mathbb{R}$ i due sottospazi

$$U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R} \mid x - 2y + z = 0\}$$

$$W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R} \mid 2x - z = 0\}$$

sono ortogonali rispetto alla forma bilineare di $\mathbb{R}^3$ definita da:

$$b((x,y,z),(x',y',z')) = 3xx' + a(xy' + x'y) + b(xz' + zx') + 4yy' - 2(yz' + zy') + czz'.$$

Esercizio 12. Una forma bilineare b di $\mathbb{R}^3$ ha come matrice associata rispetto alla base

$$\{(1,0,1),(1,-1,1),(1,-1,0)\}$$

la matrice $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -4 & -1 \end{pmatrix}$.

(i) Calcolare $b((1,-1,1),(2,7,-2))$ e $b((1,1,1),(1,1,1))$.

(ii) Calcolare $b((x,y,z),(x',y',z'))$, per due generici vettori (x,y,z) e (x',y',z') di $\mathbb{R}^3$.

Esercizio 13. È data la forma bilineare su $\mathbb{R}^4$ associata alla matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & h \\ 1 & -1 & h & 0 \end{pmatrix}$$

Al variare di $h \in \mathbb{R}$, determinare una base dei sottospazi ortogonali a

$$U = \mathscr{L}((1,0,-1,0),(0,0,1,1))$$

e

$$W = \mathscr{L}((1,0,1,0),(0,1,0,1))$$