Sapienza Università di Roma - Facoltà I3S
Corso di Laurea in Statistica Economia Finanza e Assicurazioni
Corso di Laurea in Statistica Economia e Società
Corso di Laurea in Statistica gestionale
Matematica II corso - A.A. 2017-2018 – prof. Cigliola
Foglio n.16 – Formula di Taylor e di Mac-Laurin

Esercizio 1. Calcolare il polinomio di Taylor delle seguenti funzioni nel punto x_0 arrestato all'ordine n accanto indicato:

(i) $f(x) = e^x \qquad x_0 = -1 \qquad n = 3$ $\qquad [\,\frac{1}{e} + \frac{1}{e}(x+1) + \frac{1}{e}\frac{(x+1)^2}{2!} + \frac{1}{e}\frac{(x+1)^3}{3!}\,]$

(ii) $f(x) = \log x \qquad x_0 = 1 \qquad n = 3$ $\qquad [\,(x-1) - \frac{1}{2}\frac{(x-1)^2}{2!} + \ldots\,]$

(iii) $f(x) = \frac{1}{x} \qquad x_0 = a \qquad n = 4$ $\qquad [\,\frac{1}{a} - \frac{x-a}{a^2} + \frac{(x-a)^2}{a^3} - \frac{(x-a)^3}{a^4}\,]$

(iv) $f(x) = xe^x \qquad x_0 = 0 \qquad n = 4$ $\qquad [\,x + x^2 + \frac{x^3}{2!} + \frac{x^4}{3!}\,]$

(v) $f(x) = \sqrt{x} \qquad x_0 = 4 \qquad n = 3$ $\qquad [\,2 + \frac{x-4}{4} - \frac{(x-4)^2}{64} + \frac{(x-4)^3}{512}\,]$

(vi) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \qquad x_0 = 1 \qquad n = 3$ $\qquad [\,1 - \frac{x-1}{2} + \frac{3(x-1)^2}{2^2 \cdot 2!} - \frac{15(x-1)^3}{2^3 \cdot 3!}\,]$

Esercizio 2. Riscrivere il polinomio

$$p(x) = x^4 - 5x^3 + x^2 - 3x + 4$$

nella forma $p(x) = a_n(x-4)^n + \cdots + a_1(x-4) + a_0$, per opportuni coefficienti reali a_i.
[Si tratta di sviluppare il polinomio dato nella sua formula di Taylor relativa al punto $x_0 = 4$. Si trova $p(x) = (x-4)^4 + 11(x-4)^3 + \ldots$]

Esercizio 3. Scrivere lo sviluppo di Mac-Laurin delle seguenti funzioni:

(i) $f(x) = \operatorname{tg} x$ $\qquad [\,x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \ldots\,]$

(ii) $f(x) = e^{\operatorname{arctg} x}$ $\qquad [\,1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{7x^4}{24} + \ldots\,]$

(iii) $f(x) = (1+x)^x$ $\qquad [\,1 + x^2 - \frac{x^3}{2} + \frac{5x^4}{6} - \ldots\,]$

(iv) $f(x) = \displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\,dt$

[Si utilizzi il teorema di Torricelli-Barrow, derivando la funzione integrale più volte. Si trova $f'(x) = e^{-x^2}$, $f''(x) = -2xe^{-x^2}$, $f'''(x) = (4x^2-2)e^{-x^2}$, ... Ovviamente $f(0) = 0$. Si trova così lo sviluppo $x - \frac{x^3}{3}\ldots$]

Esercizio 4. Di una funzione f si conosce il seguente sviluppo di Mac-Laurin:

$$f(x) = -3 + 2x^2 - 2x^4 + o(x^6).$$

Rispondere ai seguenti quesiti:

(i) Provare che l'origine è un punto stazionario per f.
[Dalla formula di Mac-Laurin il coefficiente di x^n è $\frac{f^{(n)}(0)}{n!}$. Quindi la derivata prima di f calcolata in $x_0 = 0$ è nulla poiché manca il termine x nel polinomio dato. Ciò significa che l'origine è un punto stazionario per f.]

(ii) Classificare la natura del punto stazionario $x_0 = 0$ per f.
[Usando la formula ricordata sopra si ha che $\frac{f''(0)}{2}$ è uguale al coefficiente di x^2, quindi 2. Siccome è positivo, segue che $f''(0) > 0$, quindi x_0 è un minimo locale per f.]

(iii) Calcolare lo sviluppo di Mac-Laurin di f arrestato al grado 5.
[Siccome i termini mancanti partono dal grado 6, possiamo dedurre che lo sviluppo cercato è $-3 + 2x^2 - 2x^4$.]

(iv) Stabilire se f è una funzione pari.
[Il fatto che nello sviluppo dato compaiano solo termini di grado pari non ci deve trarre in inganno. Infatti, il termine di grado 7 potrebbe essere non nullo.]