Sapienza Università di Roma - Corso di laurea in Ingegneria Energetica
Geometria - A.A. 2016-2017 – prof. Cigliola
Foglio n.16 – Forme quadratiche

Esercizio 1. Per ciascuna delle forme quadratiche su $\mathbb{R}^3$ seguenti calcolare la forma polare, una base diagonalizzante di Sylvester, rango e segnatura:

(i) $Q(x,y,z) = xz + xy + yz$

[$b((x,y,z),(x',y',z')) = \frac{1}{2}xz' + \frac{1}{2}x'z + \frac{1}{2}xy' + \frac{1}{2}x'y + \frac{1}{2}yz' + \frac{1}{2}y'z$
$\operatorname{rk} Q = 3$, $\operatorname{sgn} Q = (1,2)$, $\mathcal{B} = \{ (1,1,0),(1,-1,0),(1,1,-1) \}$]

(ii) $Q(x,y,z) = 2xz - 2xy - 2yz$

(iii) $Q(x,y,z) = x^2 - 2xz - y^2 - z^2$

(iv) $Q(x,y,z) = -x^2 - 4xy + 3y^2 + 2z^2$

(v) $Q(x,y,z) = 5x^2 + 3y^2 + xz$

[$b((x,y,z),(x',y',z')) = 5xx' + 3yy' + \frac{1}{2}xz' + \frac{1}{2}x'z$ $\operatorname{rk} Q = 3$, $\operatorname{sgn} Q = (3,0)$,
$\mathcal{B} = \left\{ (\frac{1}{\sqrt{5}},0,0),(0,\frac{1}{\sqrt{3}},0),(\frac{1}{\sqrt{5}},0,-\frac{10}{\sqrt{5}}) \right\}$]

(vi) $Q(x,y,z) = 6xy$

[$b((x,y,z),(x',y',z')) = 3xy' + 3x'y$, $\operatorname{rk} Q = 2$, $\operatorname{sgn} Q = (1,-1)$,
$\mathcal{B} = \left\{ (\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},0),(\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}},0),(0,0,1) \right\}$]

Esercizio 2. Classificare le forme quadratiche dell'esercizio precedente (dire se sono indefinite, definite positive etc.).

[(i) indefinita, (ii) indefinita, (iii) indefinita, (iv) indefinita, (v) definita positiva, (vi) indefinita]

Esercizio 3. Data la matrice A, trovare una matrice invertibile M tale che $M^T AM$ sia la forma canonica di Sylvester di A e calcolare la segnatura di A:

(i) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ [$\operatorname{sgn} A = (1,1)$]

(ii) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ [$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\operatorname{sgn} A = (1,0)$]

(iii) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ [$\operatorname{sgn} A = (3,0)$]

(iv) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ [$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{10}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{10}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}$, $\operatorname{sgn} A = (3,0)$]

Esercizio 4. Classificare le matrici dell'esercizio precedente (dire se sono indefinite, definite positive etc.).

[(i) indefinita, (ii) semidefinita positiva, (iii) definita positiva, (iv) definita positiva]

Esercizio 5. Individuare tra le seguenti matrici quelle definite positive utilizzando il criterio dei minori principali:

(i) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

(ii) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

(iii) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ [definita positiva]

(iv) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

(v) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(vi) $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

Esercizio 6. Al variare di k in $\mathbb{R}$, calcolare la segnatura della matrice: $\begin{pmatrix} k & 0 & 1 \\ 0 & k & 0 \\ 1 & 0 & k \end{pmatrix}$. Classificare il suo tipo al variare di k.

[Il determinante della matrice vale $k^3 - k$. Il rango è tre per $k \neq 0, 1, -1$, due in caso contrario. La matrice va diagonalizzata caso per caso per poter leggerne la segnatura. Sia $k \neq 0, 1, -1$. Allora come due vettori non isotropi ortogonali prendiamo subito e_1 ed e_2, leggendo dalla matrice. Abbiamo che $Q(e_1) = Q(e_2) = k$. Cerchiamo ora $\mathcal{L}(e_1, e_2)^\perp$. Risolvendo il sistema lineare $\begin{cases} kx + z = 0 \\ ky = 0, \end{cases}$ troviamo il terzo vettore $v_3 = (1, 0, -k)$, con $Q(v_3) = k^3 - k \neq 0$. Passiamo ora alla segnatura: se $k < -1$, $\operatorname{sgn} Q = (0, 3)$ (definita negativa); per $-1 < k < 0$, $\operatorname{sgn} Q = (1, 2)$ (indefinita); se $0 < k < 1$, $\operatorname{sgn} Q = (2, 1)$, (indefinita); infine, se $k > 1$, $\operatorname{sgn} Q = (3, 0)$ (definita positiva). Se $k = 0$, la matrice diventa $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ che ha rango due. Leggendo tale matrice si trova facilmente la base diagonalizzante $\{e_1 + e_3,\ e_1 - e_3,\ e_2\}$. La segnatura è $\operatorname{sgn} Q = (1, 1)$ e Q è indefinita. Se $k = 1$, la matrice diventa $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Per brevità leggiamo subito che e_1 ed e_2 sono ortogonali, quindi indipendentemente da chi scegliamo come terzo vettore (isotropo) per completare la base, la segnatura è $\operatorname{sgn} Q = (2, 0)$, quindi Q è semidefinita positiva. Ad ultimo, per $k = -1$, la matrice diventa: $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Come nel caso precedente troviamo che $\operatorname{sgn} Q = (0, 2)$ e che Q è semidefinita negativa.]

Esercizio 7. Al variare di k in $\mathbb{R}$, calcolare la segnatura della matrice: $\begin{pmatrix} k & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & k \end{pmatrix}$. Per $k = 3$ trovare una matrice invertibile M tale che $M^T A M$ sia la forma canonica di Sylvester di A.

Esercizio 8. Al variare di k in $\mathbb{R}$, calcolare la segnatura della matrice: $\begin{pmatrix} 2k & 0 & 1-k \\ 0 & k & 0 \\ 1-k & 0 & 2k \end{pmatrix}$. Per quali valori di k essa risulta definita positiva?