Sapienza Università di Roma – Corso di laurea in Ingegneria Elettrotecnica
Geometria - A.A. 2018-2019
Foglio n.15 – Forme bilineari

Esercizio 1. Provare che le seguenti applicazioni sono forme bilineari e determinare la matrice associata rispetto alla base canonica dello spazio di definizione:

(i) $b : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tale che $b((x,y);(x',y')) = xx' - 2xy' + \frac{1}{2}yy'$ $\left[\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\right]$

(ii) $b : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tale che $b((x,y,z);(x',y',z')) = xx' - 2yy' + zz'$ $\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right]$

(iii) $b : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ tale che $b(A;B) = \mathrm{tr}(AB^T - BA^T)$ [forma bilineare nulla]

(iv) $b : \mathbb{R}_{\leqslant 2}[x] \times \mathbb{R}_{\leqslant 2}[x] \to \mathbb{R}$ tale che $b(f(x), g(x)) = f(0)g'(0) + f'(0)g(0)$, dove con $f'(x)$ si intende la derivata di f rispetto ad x. $\left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\right]$

(v) $b : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tale che $b((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) = (x_1 + \dots + x_n)(y_1 + \dots + y_n)$
[si ottiene la matrice quadrata di ordine n con tutte le entrate uguali ad 1]

(vi) $b : \mathbb{R}_{\leqslant 2}[x] \times \mathbb{R}_{\leqslant 2}[x] \to \mathbb{R}$ tale che $b(f(x), g(x)) = f(2) \cdot g(2)$. $\left[\begin{pmatrix} 16 & 8 & 4 \\ 8 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}\right]$

(vii) $b : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ tale che $b((a_{ij});(b_{ij})) = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant 2} (i-j)a_{ij}b_{ji}$ $\left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right]$

(viii) $b : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ tale che $b(A;B) = \mathrm{tr}(ACB)$, dove $C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. $\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right]$

Esercizio 2. Provare che le seguenti applicazioni non sono forme bilineari:

(i) $b : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tale che $b((x,y),(x',y')) = -xx' - xy' + 3$ $[b(\mathbf{0},\mathbf{0}) = 3]$

(ii) $b : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tale che $b((x,y,z),(x',y',z')) = e^{xx'} - yy'$ $[b(\mathbf{0},\mathbf{0}) = 1]$

(iii) $b : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ tale che $b(A,\, B) = \det(A + B)$

(iv) $b : \mathbb{R}_{\leqslant 1}[x] \times \mathbb{R}_{\leqslant 1}[x] \to \mathbb{R}$ tale che $b(ax + \alpha,\ a'x + \alpha') = aa' + \alpha$ $[b(1,0) = 1]$

(v) $b : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tale che $b((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) = |x_1y_1 + \dots + x_ny_n|$

(vi) $b : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tale che $b((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) = \sqrt{x_1y_1 + \dots + x_ny_n}$

(vii) $b : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tale che $b((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) = \sqrt{x_1^2y_1^2 + \dots + x_n^2y_n^2}$

(viii) $b((x,y,z),(x',y',z')) = 1$ $[b(\mathbf{0},\mathbf{0}) = 1]$

Esercizio 3. Determinare la matrice associata rispetto alla base $\mathcal{B} = \{(1,1,1), (-1,0,1), (0,2,1)\}$, la matrice associata rispetto alla base canonica e il rango di ciascuna delle seguenti forme bilineari su $\mathbb{R}^3$:

(i) $b((x,y,z),(x',y',z')) = xy' + yz' + zx'$ $\left[\begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}\right]$

(ii) $b((x,y,z),(x',y',z')) = xy' + yz' - 2zx' + x'y + y'z - 2z'x$ $\left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \text{simmetrica}\right]$

(iii) $b((x,y,z),(x',y',z')) = xy' + yz' - zx'$

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}\right]$$

(iv) $b((x,y,z),(x',y',z')) = xx' + 2yx' - zz' + 2xz'$

$$\left[\begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ -4 & -2 & -3 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}\right]$$

(v) $b((x,y,z),(x',y',z')) = xx' + 2yy' - zz' - (xy' + x'y) + (zx' + xz')$

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \text{ simmetrica}\right]$$

(vi) $b((x,y,z),(x',y',z')) = yz' - y'z + xz' - x'z + xy' - yx'$

$$\left[\begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ -4 & 0 & -5 \\ -2 & 5 & 0 \end{pmatrix}, \text{ antisimmetrica}\right]$$

(vii) $b((x,y,z),(x',y',z')) = (x+y+z)(x'+y'+z')$

$$\left[\begin{pmatrix} 9 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 \\ 9 & 0 & 9 \end{pmatrix}, \text{ simmetrica}\right]$$

(viii) $b((x,y,z),(x',y',z')) = xy'$

Dire se le precedenti forme sono simmetriche o antisimmetriche.

Esercizio 4. Diagonalizzare le forme bilineari simmetriche dell'esercizio precedente.

[Si badi bene che le matrici elencate non sono associate rispetto alla base canonica...]

Esercizio 5. Diagonalizzare le forme bilineari simmetriche su $\mathbb{R}^n$ associate alle seguenti matrici rispetto alla base canonica, esplicitando la base diagonalizzante usata e la forma diagonale trovata:

(i) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ con $n = 2$ $\qquad [\mathcal{B} = \{\, (1,0),\ (2,1) \,\},\ Q(X,Y) = X^2 - 2Y^2]$

(ii) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ con $n = 2$ $\qquad [\mathcal{B} = \{\, (1,1), (1,-1) \,\},\ Q(X,Y) = 2X^2 - 2Y^2]$

(iii) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ con $n = 2$ $\qquad [\mathcal{B} = \{\, (1,1), (1,-1) \,\},\ Q(X,Y) = 2X^2]$

(iv) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ con $n = 3$ $\qquad [\mathcal{B} = \{\, (1,0,0), (-1,0,1), (-2,1,1) \,\},\ Q(X,Y,Z) = X^2 - Y^2 + Z^2]$

(v) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ con $n = 3$ $\qquad [\mathcal{B} = \{\, (1,0,0), (0,0,1), (1,1,2) \,\},\ Q(X,Y,Z) = X^2 - Y^2 + 4Z^2]$

(vi) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ con $n = 3$ $\qquad [\mathcal{B} = \{\, (1,1,0), (1,-1,0), (1,-1,1) \,\},\ Q(X,Y,Z) = 2X^2 - 2Y^2 + 2Z^2]$

(vii) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ con $n = 3$ $\qquad [\mathcal{B} = \{\, (1,0,1), (1,0,-1), (0,1,0) \,\},\ Q(X,Y,Z) = 2X^2 - 2Y^2]$

(viii) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ con $n = 4$

$[\mathcal{B} = \{\, (0,1,0,0), (0,0,1,0), (1,0,-1,0), (0,0,0,1) \,\},\ Q(X,Y,Z) = X^2 + Y^2]$

(ix) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ con $n = 4$

[$\mathcal{B} = \{ (1,0,0,0), (0,1,0,0), (2,0,1,0), (0,-2,0,1) \}$, $Q(X,Y,Z) = X^2 + Y^2 - 3X^2 - 5T^2$]

Esercizio 6. Si consideri al variare di k la forma bilineare su $\mathbb{R}^4$ definita da

$$b(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1y_1 + x_4y_4 + x_3y_1 + x_1y_3 + kx_4y_2 + kx_2y_4.$$

(i) Determinare il rango di b al variare di k. [per $k \neq 0$ il rango vale 4, altrimenti vale 3]

(ii) Diagonalizzare b al variare di k.

[per ogni k si usi la base $\mathcal{B} = \{ (1,0,0,0), (0,0,0,1), (1,0,-1,0), (0,1,0,-k) \}$ che produce la forma diagonale $Q(X,Y,Z,T) = X^2 + Y^2 - Z^2 - k^2T^2$]

(iii) Determinare al variare di k un sottospazio di dimensione massima possibile che non contiene vettori isotropi non banali.

[Per $k \neq 0$ la segnatura è $(3,1)$, per $k = 0$ è invece $(2,1)$. Allora nel caso $k \neq 0$ conviene prendere lo spazio $W = \mathcal{L}((1,0,0,0), (0,0,0,1), (0,1,0,-k))$, nel caso $k = 0$ invece $W = \mathcal{L}((1,0,0,0), (0,0,0,1))$]

Esercizio 7. Si ponga $\{ e_1, e_2, e_3 \}$ la base canonica di $\mathbb{R}^3$. Determinare, se esiste, una forma bilineare simmetrica su $\mathbb{R}^3$ tale che $b(e_1,e_1) = b(e_2,e_2) = b(e_3,e_3) = 1$ e tale che i vettori $e_1 + e_2$, $e_1 + e_3$ e $e_2 + e_3$ sono isotropi. Diagonalizzare la forma trovata.

[Deve essere $b(e_1 + e_2, e_1 + e_2) = 2 + 2b(e_1, e_2) = 0$, cioè $b(e_1, e_2) = -1$. Similmente per gli altri termini misti. Allora la matrice associata è $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$]

Esercizio 8. Determinare il sottospazio ortogonale di $W \subset \mathbb{R}^4$ rispetto alla forma bilineare b associata alla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(i) $W = \mathcal{L}((1,2,0,1), (1,0,0,-1), (0,0,0,1))$ [$W^\perp = \mathcal{L}((0,1,1,0), (0,0,0,1))$]

(ii) $W = \mathcal{L}((1,0,0,1), (0,0,0,-3))$ [$W^\perp = \mathcal{L}((0,1,1,0), (0,0,0,1), (1,0,0,0))$]

(iii) $W = \mathcal{L}((0,2,1,0), (0,-1,-1,0))$ [$W^\perp = \mathcal{L}((0,1,0,0), (0,0,1,0), (0,0,0,1))$]

(iv) $W = \mathbb{R}^4$ [$W^\perp = \mathcal{L}((0,1,1,0), (0,0,0,1))$]

(v) $W = \mathcal{L}((0,0,0,5))$ [$W^\perp = \mathbb{R}^4$]

(vi) $W = \mathcal{L}((0,0,7,0))$ [$W^\perp = \mathcal{L}((0,1,0,0), (0,0,1,0), (0,0,0,1))$]

Stabilire poi per quali di essi si ha che $W \oplus W^\perp = \mathbb{R}^4$. Determinare infine un sottospazio massimale di $\mathbb{R}^4$ su cui la restrizione di b sia non degenere.

[Poiché il rango di b è 2, si può ad esempio prendere il sottospazio $W = \mathcal{L}((1,0,0,0), (0,1,0,0))$, generato da due vettori isotropi che però non sono ortogonali tra loro.]

Esercizio 9. Dire per quali valori di $a, b, c \in \mathbb{R}$ i due sottospazi

$$U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y + z = 0\}$$

$$W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - z = 0\}$$

sono ortogonali rispetto alla forma bilineare di $\mathbb{R}^3$ definita da:

$$b((x,y,z), (x',y',z')) = 3xx' + a(xy' + x'y) + b(xz' + zx') + 4yy' - 2(yz' + zy') + czz'.$$

[$a = -2$, $b = 0$ e $c = \frac{3}{2}$.]

Esercizio 10. Una forma bilineare b di $\mathbb{R}^3$ ha come matrice associata rispetto alla base $\mathcal{B} = \{(1,0,1),(1,-1,1),(1,-1,0)\}$ la matrice $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -4 & -1 \end{pmatrix}$.

(i) Calcolare $b((1,-1,1),(2,7,-2))$ e $b((1,1,1),(1,1,1))$.

(ii) Calcolare $b((x,y,z),(x',y',z'))$, per due generici vettori (x,y,z) e (x',y',z') di $\mathbb{R}^3$.

Esercizio 11. È data la forma bilineare su $\mathbb{R}^4$ associata alla matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & h \\ 1 & -1 & h & 0 \end{pmatrix}$$

Al variare di $h \in \mathbb{R}$, determinare una base dei sottospazi ortogonali a

$$U = \mathcal{L}((1,0,-1,0),(0,0,1,1))$$

e

$$W = \mathcal{L}((1,0,1,0),(0,1,0,1))$$