

Sapienza Università di Roma – Corso di laurea in Ingegneria Energetica
Geometria - A.A. 2016-2017 – prof. Cigliola
Foglio n.15 – Forme bilineari

Esercizio 1. Provare che le seguenti applicazioni sono forme bilineari e determinare la matrice associata rispetto alla base canonica dello spazio di definizione:

(i) $b: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $b((x, y); (x', y')) = xx' - 2xy' + \frac{1}{2}yy'$ $\left[\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \right]$

(ii) $b: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $b((x, y, z); (x', y', z')) = xx' - 2yy' + zz'$ $\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right]$

(iii) $b: \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $b(A; B) = \text{tr}(AB^T - BA^T)$ [forma bilineare nulla]

(iv) $b: \mathbb{R}_{\leq 2}[x] \times \mathbb{R}_{\leq 2}[x] \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $b(f(x), g(x)) = f(0)g'(0) + f'(0)g(0)$, dove con $f'(x)$ si intende la derivata di f rispetto ad x . $\left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right]$

(v) $b: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $b((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) = (x_1 + \dots + x_n)(y_1 + \dots + y_n)$
[si ottiene la matrice quadrata di ordine n con tutte le entrate uguali ad 1]

(vi) $b: \mathbb{R}_{\leq 2}[x] \times \mathbb{R}_{\leq 2}[x] \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $b(f(x), g(x)) = f(2) \cdot g(2)$. $\left[\begin{pmatrix} 16 & 8 & 4 \\ 8 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \right]$

(vii) $b: \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $b((a_{ij}); (b_{ij})) = \sum_{1 \leq i, j \leq 2} (i - j)a_{ij}b_{ji}$ $\left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right]$

(viii) $b: \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $b(A; B) = \text{tr}(ACB)$, dove $C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. $\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right]$

Esercizio 2. Provare che le seguenti applicazioni non sono forme bilineari:

(i) $b: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $b((x, y), (x', y')) = -xx' - xy' + 3$ [$b(\mathbf{0}, \mathbf{0}) = 3$]

(ii) $b: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $b((x, y, z), (x', y', z')) = e^{xx'} - yy'$ [$b(\mathbf{0}, \mathbf{0}) = 1$]

(iii) $b: \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $b(A, B) = \det(A + B)$

(iv) $b: \mathbb{R}_{\leq 1}[x] \times \mathbb{R}_{\leq 1}[x] \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $b(ax + \alpha, a'x + \alpha') = aa' + \alpha$ [$b(1, 0) = 1$]

(v) $b: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $b((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) = |x_1y_1 + \dots + x_ny_n|$

(vi) $b: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $b((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) = \sqrt{x_1y_1 + \dots + x_ny_n}$

(vii) $b: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $b((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) = \sqrt{x_1^2y_1^2 + \dots + x_n^2y_n^2}$

(viii) $b((x, y, z), (x', y', z')) = 1$ [$b(\mathbf{0}, \mathbf{0}) = 1$]

Esercizio 3. Determinare la matrice associata rispetto alla base $\mathcal{B} = \{(1, 1, 1), (-1, 0, 1), (0, 2, 1)\}$, la matrice associata rispetto alla base canonica e il rango di ciascuna delle seguenti forme bilineari su \mathbb{R}^3 :

(i) $b((x, y, z), (x', y', z')) = xy' + yz' + zx'$ $\left[\begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \right]$

(ii) $b((x, y, z), (x', y', z')) = xy' + yz' - 2zx' + x'y + y'z - 2z'x$ $\left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \right]$, simmetrica]

$$(iii) \quad b((x, y, z), (x', y', z')) = xy' + yz' - zx' \quad \left[\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \right]$$

$$(iv) \quad b((x, y, z), (x', y', z')) = xx' + 2yx' - zz' + 2xz' \quad \left[\begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ -4 & -2 & -3 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix} \right]$$

$$(v) \quad b((x, y, z), (x', y', z')) = xx' + 2yy' - zz' - (xy' + x'y) + (zx' + xz') \quad \left[\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \text{simmetrica} \right]$$

$$(vi) \quad b((x, y, z), (x', y', z')) = yz' - y'z + xz' - x'z + xy' - yx' \quad \left[\begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ -4 & 0 & -5 \\ -2 & 5 & 0 \end{pmatrix}, \text{antisimmetrica} \right]$$

$$(vii) \quad b((x, y, z), (x', y', z')) = (x + y + z)(x' + y' + z') \quad \left[\begin{pmatrix} 9 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 \\ 9 & 0 & 9 \end{pmatrix}, \text{simmetrica} \right]$$

$$(viii) \quad b((x, y, z), (x', y', z')) = xy'$$

Dire se le precedenti forme sono simmetriche o antisimmetriche.

Esercizio 4. Diagonalizzare le forme bilineari simmetriche dell'esercizio precedente.

[Si badi bene che le matrici elencate non sono associate rispetto alla base canonica...]

Esercizio 5. Diagonalizzare le forme bilineari simmetriche su \mathbb{R}^n associate alle seguenti matrici rispetto alla base canonica, esplicitando la base diagonalizzante usata e la forma diagonale trovata:

$$(i) \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \text{ con } n = 2 \quad [\mathcal{B} = \{ (1, 0), (2, 1) \}, Q(X, Y) = X^2 - 2Y^2]$$

$$(ii) \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ con } n = 2 \quad [\mathcal{B} = \{ (1, 1), (1, -1) \}, Q(X, Y) = 2X^2 - 2Y^2]$$

$$(iii) \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ con } n = 2 \quad [\mathcal{B} = \{ (1, 1), (1, -1) \}, Q(X, Y) = 2X^2]$$

$$(iv) \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \text{ con } n = 3 \quad [\mathcal{B} = \{ (1, 0, 0), (-1, 0, 1), (-2, 1, 1) \}, Q(X, Y, Z) = X^2 - Y^2 + Z^2]$$

$$(v) \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \text{ con } n = 3 \quad [\mathcal{B} = \{ (1, 0, 0), (0, 0, 1), (1, 1, 2) \}, Q(X, Y, Z) = X^2 - Y^2 + 4Z^2]$$

$$(vi) \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ con } n = 3 \quad [\mathcal{B} = \{ (1, 1, 0), (1, -1, 0), (1, -1, 1) \}, Q(X, Y, Z) = 2X^2 - 2Y^2 + 2Z^2]$$

$$(vii) \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ con } n = 3 \quad [\mathcal{B} = \{ (1, 0, 1), (1, 0, -1), (0, 1, 0) \}, Q(X, Y, Z) = 2X^2 - 2Y^2]$$

$$(viii) \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ con } n = 4 \quad [\mathcal{B} = \{ (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (1, 0, -1, 0), (0, 0, 0, 1) \}, Q(X, Y, Z) = X^2 + Y^2]$$

$$(ix) \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ con } n = 4$$

$$[\mathcal{B} = \{ (1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (2, 0, 1, 0), (0, -2, 0, 1) \}, Q(X, Y, Z) = X^2 + Y^2 - 3X^2 - 5T^2]$$

Esercizio 6. Si consideri al variare di k la forma bilineare su \mathbb{R}^4 definita da

$$b(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1y_1 + x_4y_4 + x_3y_1 + x_1y_3 + kx_4y_2 + kx_2y_4.$$

(i) Determinare il rango di b al variare di k . [per $k \neq 0$ il rango vale 4, altrimenti vale 3]

(ii) Diagonalizzare b al variare di k .

[per ogni k si usi la base $\mathcal{B} = \{ (1, 0, 0, 0), (0, 0, 0, 1), (1, 0, -1, 0), (0, 1, 0, -k) \}$ che produce la forma diagonale $Q(X, Y, Z, T) = X^2 + Y^2 - Z^2 - k^2T^2$]

(iii) Determinare al variare di k un sottospazio di dimensione massima possibile che non contiene vettori isotropi non banali.

[Per $k \neq 0$ la segnatura è $(3, 1)$, per $k = 0$ è invece $(2, 1)$. Allora nel caso $k \neq 0$ conviene prendere lo spazio $W = \mathcal{L}((1, 0, 0, 0), (0, 0, 0, 1), (0, 1, 0, -k))$, nel caso $k = 0$ invece $W = \mathcal{L}((1, 0, 0, 0), (0, 0, 0, 1))$]

Esercizio 7. Si ponga $\{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonica di \mathbb{R}^3 . Determinare, se esiste, una forma bilineare simmetrica su \mathbb{R}^3 tale che $b(e_1, e_1) = b(e_2, e_2) = b(e_3, e_3) = 1$ e tale che i vettori $e_1 + e_2$, $e_1 + e_3$ e $e_2 + e_3$ sono isotropi. Diagonalizzare la forma trovata.

[Deve essere $b(e_1 + e_2, e_1 + e_2) = 2 + 2b(e_1, e_2) = 0$, cioè $b(e_1, e_2) = -1$. Similmente per gli altri

termini misti. Allora la matrice associata è $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$]

Esercizio 8. Determinare il sottospazio ortogonale di $W \subset \mathbb{R}^4$ rispetto alla forma bilineare b associata alla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(i) $W = \mathcal{L}((1, 2, 0, 1), (1, 0, 0, -1), (0, 0, 0, 1))$ [$W^\perp = \mathcal{L}((0, 1, 1, 0), (0, 0, 0, 1))$]

(ii) $W = \mathcal{L}((1, 0, 0, 1), (0, 0, 0, -3))$ [$W^\perp = \mathcal{L}((0, 1, 1, 0), (0, 0, 0, 1), (1, 0, 0, 0))$]

(iii) $W = \mathcal{L}((0, 2, 1, 0), (0, -1, -1, 0))$ [$W^\perp = \mathcal{L}((0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1))$]

(iv) $W = \mathbb{R}^4$ [$W^\perp = \mathcal{L}((0, 1, 1, 0), (0, 0, 0, 1))$]

(v) $W = \mathcal{L}((0, 0, 0, 5))$ [$W^\perp = \mathbb{R}^4$]

(vi) $W = \mathcal{L}((0, 0, 7, 0))$ [$W^\perp = \mathcal{L}((0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1))$]

Stabilire poi per quali di essi si ha che $W \oplus W^\perp = \mathbb{R}^4$. Determinare infine un sottospazio massimale di \mathbb{R}^4 su cui la restrizione di b sia non degenera.

[Poiché il rango di b è 2, si può ad esempio prendere il sottospazio $W = \mathcal{L}((1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0))$, generato da due vettori isotropi che però non sono ortogonali tra loro.]

Esercizio 9. Dire per quali valori di $a, b, c \in \mathbb{R}$ i due sottospazi

$$U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y + z = 0\}$$

$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - z = 0\}$$

sono ortogonali rispetto alla forma bilineare di \mathbb{R}^3 definita da:

$$b((x, y, z), (x', y', z')) = 3xx' + a(xy' + x'y) + b(xz' + zx') + 4yy' - 2(yz' + zy') + czz'.$$

[$a = -2, b = 0$ e $c = \frac{3}{2}$.]

Esercizio 10. Una forma bilineare b di \mathbb{R}^3 ha come matrice associata rispetto alla base $\mathcal{B} = \{(1, 0, 1), (1, -1, 1), (1, -1, 0)\}$ la matrice $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -4 & -1 \end{pmatrix}$.

(i) Calcolare $b((1, -1, 1), (2, 7, -2))$ e $b((1, 1, 1), (1, 1, 1))$.

(ii) Calcolare $b((x, y, z), (x', y', z'))$, per due generici vettori (x, y, z) e (x', y', z') di \mathbb{R}^3 .

Esercizio 11. È data la forma bilineare su \mathbb{R}^4 associata alla matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & h \\ 1 & -1 & h & 0 \end{pmatrix}$$

Al variare di $h \in \mathbb{R}$, determinare una base dei sottospazi ortogonali a

$$U = \mathcal{L}((1, 0, -1, 0), (0, 0, 1, 1))$$

e

$$W = \mathcal{L}((1, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 1))$$