Sapienza Università di Roma
Corso di laurea in Ingegneria Energetica
Geometria - A.A. 2015-2016
Foglio n.15 – Diagonalizzazione di applicazione lineari
prof. Cigliola

Esercizio 1. Sia data l'applicazione $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tale che

$$F(x, y) = (x - y, y), \qquad \forall\ (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

(i) Verificare che F è lineare.

(ii) Stabilire se F è un automorfismo.

(iii) Determinare la matrice associata ad F rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^2$ e rispetto alla base $\mathscr{B} = \{\ (1,2),\ (-1,-1)\ \}$.

(iv) Dato il vettore $v = (-1, 3)$, calcolare l'immagine diretta del sottospazio $\mathscr{L}(v)$ e la controimmagine del vettore v sotto l'azione di F.

(v) Determinare tutti gli autovettori di F e stabilire se F è diagonalizzabile.

Esercizio 2. Sia data l'applicazione lineare $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tale che

$$F(x, y) = (x + y, x + y), \qquad \forall\ (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

(i) Stabilire se F è un automorfismo.

(ii) Determinare tutti gli autovettori di F e stabilire se F è diagonalizzabile.

Esercizio 3. Sia data l'applicazione lineare $F : \mathbb{R}_{\leqslant 2}[x] \longrightarrow \mathbb{R}_{\leqslant 2}[x]$ tale che

$$F(1) = x^2 \qquad F(x) = -1 + x + x^2 \qquad F(x^2) = x^2.$$

(i) Stabilire se F è un automorfismo.

(ii) Determinare una base del nucleo e dell'immagine di F.

(iii) Determinare autovalori ed autospazi di F.

(iv) Stabilire se F è diagonalizzabile.

Esercizio 4. Sia data l'applicazione $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tale che

$$F(x, y, z) = (x - y + z, 2y, z), \qquad \forall\ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

(i) Determinare $\mathrm{Ker}(F)$ e $\mathrm{Im}(F)$.

(ii) Dato il vettore $v = (-1, 0, 1)$, calcolare l'immagine diretta del sottospazio $\mathscr{L}(v)$ e la controimmagine del vettore v sotto l'azione di F.

(iii) Stabilire se F è diagonalizzabile.

Esercizio 5. Sia data l'applicazione $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tale che

$$F(x, y, z) = (2y,\ kx - y + kz,\ 2y), \qquad \forall\ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

dove k è un parametro reale.

(i) Determinare al variare di k una base di $\mathrm{Ker}(F)$ e $\mathrm{Im}(F)$.

(ii) Stabilire per quali valori di k l'endomorfismo F è diagonalizzabile.

Esercizio 6. Sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'endomorfismo associato rispetto alla base canonica alla matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

(i) Stabilire se f è invertibile.

(ii) Determinare nucleo ed immagine di f.

(iii) Determinare gli autovalori di f.

(iv) Stabilire se f è diagonalizzabile.

(v) Dimostrare che non esiste nessuna base di $\mathbb{R}^4$ rispetto a cui la matrice associata ad f sia $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Esercizio 7. Si consideri l'endomorfismo $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tale che $F(0,0,1,0) = (1,2,1,3)$, $\mathrm{Ker}(F) = \mathscr{L}((1,1,0,0),(1,-1,0,0))$ ed avente $(0,0,0,1)$ come autovettore associato all'autovalore $\lambda \in \mathbb{R}$. Stabilire per quali valori di λ F è diagonalizzabile.

Esercizio 8. Si consideri la matrice $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$. Sia data poi l'applicazione $F : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ tale che

$$F(A) = CAC^{-1}, \qquad \forall A \in M_2(\mathbb{R})\ .$$

(i) Dimostrare che F è un endomorfismo di $M_2(\mathbb{R})$.

(ii) Decidere se F è iniettivo.

(iii) Stabilire se F è diagonalizzabile.

Esercizio 9. Si consideri l'endomorfismo $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tale che

$$f(x, y, z, t) = (2x - y - z, y, z, z + 2t), \qquad \forall\ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4.$$

(i) Stabilire se esiste una base di $\mathbb{R}^4$ costituita di autovettori di f.

(ii) Stabilire se f è un isomorfismo.

(iii) Determinare esplicitamente l'insieme $\{(x, y, z, t) \mid f(x, y, z, t) = (-x, -y, -z, -t)\}$.

Esercizio 10. Stabilire per quali valori di k esiste una base di $\mathbb{R}^4$ costituita da autovettori della matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & k & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & -k & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Determinare una tale base nel caso $k = 1$.

Esercizio 11. Sia data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & k \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1-k \\ 0 & 0 & 2k-1 & 0 \end{pmatrix}$$

con k parametro reale. Sia $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione che ha A come matrice associata rispetto alla base canonica.

(i) Discutere al variare di k la surgettività di F.

(ii) Determinare la dimensione di $\mathrm{Ker}(F)$ al variare di k.

(iii) In corrispondenza dei valori di k per cui $\dim(\mathrm{Ker}(F)) = 2$, scrivere esplicitamente le equazioni di F e stabilire se essa è diagonalizzabile.

Esercizio 12. Sia dato l'endomorfismo diagonalizzabile $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ avente base diagonalizzante

$$\mathscr{B} = \{v_1 = (1,2,0),\ v_2 = (0,1,1),\ v_3 = (0,1,-1)\}.$$

Si sa che 3 è autovalore di f e che $f(v_1) = f(v_2)$.

(i) Stabilire se f è iniettiva.

(ii) Stabilire se f è surgettiva.

(iii) Determinare una base di $\mathrm{Im}(f)$ ed una di $\mathrm{Ker}(f)$.

(iv) Calcolare esplicitamente $f(x,y,z)$ per ogni $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

Esercizio 13. Si consideri l'endomorfismo $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ definito da

$$F(x,y,z,t) = (y+z,\ -(1+k^2)x - 2y - 2z - (1+k^2)t,\ x+t,\ 0)$$

dove k è un parametro reale. Stabilire per quali valori di k F è diagonalizzabile.

Esercizio 14. Sia data l'applicazione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $f(a,b,c) = (2b, a-b, b)$. Stabilire per quali valori di k esiste una base $\mathscr{B}$ di $\mathbb{R}^3$ per cui

$$M_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k+1 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 15. È dato un endomorfismo non nullo F di $\mathbb{R}^3$ il cui polinomio caratteristico è

$$p(\lambda) = -\lambda^3 + k^2\lambda,$$

con k parametro reale.

(i) Per quali valori di k F è un isomorfismo?

(ii) Per quali valori di k F è diagonalizzabile?

Esercizio 16. Sono dati i seguenti sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^4$:

$$U = \{(x, y, z, t) \mid 2kx + y = 0,\ z + t = 0,\ y + z = 0\}$$

$$V = \{(x, y, z, t) \mid x + y + t = z = 0\}$$

$$W = \langle (h, 0, -h, 0), (h + 1, 1, 0, h) \rangle .$$

Dire per quali valori reali di h e k U, V e W sono autospazi di un endomorfismo diagonalizzabile di $\mathbb{R}^4$.