Sapienza Università di Roma
Corso di laurea in Ingegneria Energetica
Geometria - A.A. 2015-2016
Foglio n.14 – Applicazioni lineari e matrici associate
prof. Cigliola

Esercizio 1. Determinare la matrice canonica associata alle seguenti applicazioni lineari:

(i) $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \qquad F(x,y) = (x+2y, 2x+y, x-y);$

(ii) $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \qquad F(x,y) = (x-z, x+y-z, x-y);$

(iii) $F : M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}_{\leqslant 1}[x], \qquad F\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a-b) + (c+2d)x.$

Esercizio 2. Siano V e W due spazi vettoriali. Siano poi F e G due applicazioni lineari da V a W. Dimostrare che l'applicazione $F + G : V \longrightarrow W$ definita da

$$(F+G)(v) = F(v) + G(v)$$

è un'applicazione lineare da V in W. Fissate due basi, una di V e una di W, e dette A e B rispettivamente le matrici di F e G associate a tali basi, come si può calcolare la matrice di $F + G$?

Esercizio 3. Sia data l'applicazione lineare $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tale che

$$F(x,y) = (x-2y, 3y, x+y).$$

(i) Trovare $F^{-1}(0,1,-1)$.

(ii) Trovare la matrice associata ad F rispetto alle basi canoniche di $\mathbb{R}^2$ e di $\mathbb{R}^3$.

(iii) Trovare la matrice associata ad F rispetto alle basi $\{ (1,0), (-1,-1) \}$ di $\mathbb{R}^2$ e $\{ (1,1,0), (1,0,1), (0,0,1) \}$ di $\mathbb{R}^3$.

(iv) Stabilire se F è iniettiva, suriettiva, invertibile.

(v) Trovare una base dell'immagine e del nucleo di F.

Esercizio 4. Si consideri l'applicazione $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tale che

$$F(x,y,z) = (x+2y;\ -\sqrt{3}z).$$

(i) Determinare la controimmagine di $(2,2)$ sotto l'azione di F.

(ii) Determinare la matrice associata ad F rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$ e alla base $\{ (1,1), (-1,1) \}$ di $\mathbb{R}^2$.

(iii) Determinare una base e la dimensione di $\operatorname{Im} F$ e di $\operatorname{Ker} F$.

Esercizio 5. Si consideri l'applicazione $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow M_2(\mathbb{R})$ tale che

$$F(x,y,z) = \begin{pmatrix} x-y & x+y \\ 2x+y & z-x \end{pmatrix}.$$

(i) Determinare la controimmagine di della matrice identica I_2 sotto l'azione di F.

(ii) Determinare la matrice associata ad F rispetto alle basi canoniche di $\mathbb{R}^3$ e di $M_2(\mathbb{R})$.

(iii) Determinare una base e la dimensione di $\operatorname{Im} F$ e di $\operatorname{Ker} F$.

(iv) Stabilire se F è iniettiva o suriettiva.

Esercizio 6. Trovare, se esiste, un omomorfismo $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tale che $F^{-1}(0,1,1) = (1,-1,-1)$, il vettore $(1,1,-1)$ è autovettore associato all'autovalore 1 e il vettore $(-1,2,1)$ sia nel nucleo.

Esercizio 7. Trovare, se esistono, tutte le applicazioni lineari $F : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ che lasciano fissi i vettori $(1,-1,-1,0)$ e $(0,0,0,1)$ e che trasformano i vettori $(1,0,0,-1)$ e $(0,1,-1,0)$ nei loro opposti.

Esercizio 8. Determinare la matrice associata rispetto alla base canonica di $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ dell'endomorfismo F di $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ tale che $F^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = I_2$, la restrizione di F al sottospazio $ASym_2(\mathbb{R})$ si comporta come l'identità su $ASym_2(\mathbb{R})$, la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ è autovettore associato all'autovalore -1 e infine la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ è nel nucleo di F.

Esercizio 9. Sia data l'applicazione lineare $F : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ che ha per matrice associata rispetto alla base canonica la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(i) Trovare l'immagine diretta del sottospazio $U = \mathscr{L}((1,0,1,0),(1,-1,0,0))$.

(ii) Scrivere esplicitamente le equazioni di F (rispetto alle basi canoniche).

(iii) Determinare $F^{-1}(1,0,0)$.

(iv) Trovare una base e la dimensione di $\operatorname{Im} F$ e $\operatorname{Ker} F$.

Esercizio 10. Siano V uno spazio vettoriale ed $F : V \longrightarrow V$ un isomorfismo. Siano U e W due sottospazi di V tali che $U \oplus W = V$. Provare che anche $F(U) \oplus F(W) = V$.

Esercizio 11. Sia $F : M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}_{\leqslant 2}[x]$ l'applicazione tale che

$$F\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a + (b+d)x + cx^2$$

(i) Provare che F è un'applicazione lineare.

(ii) Determinare $\operatorname{Im} F$ e $\operatorname{Ker} F$, una loro base e le loro dimensioni.

(iii) Scrivere la matrice associata ad F rispetto alle basi $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ di $M_2(\mathbb{R})$ e $\{ x^2-1, x+1, 2-x \}$ di $\mathbb{R}_{\leqslant 2}[x]$.

Esercizio 12. Siano dati due spazi vettoriali V e W con basi rispettivamente $\mathscr{B}_V = \{ v_1, v_2, v_3 \}$ e $\mathscr{B}'_W = \{ w_1, w_2, w_3 \}$. Sia data l'applicazione lineare $F : V \longrightarrow W$ tale che

$$F(v_1 + v_3) = w_1 + w_2 \qquad F(v_2) = w_3 \qquad F(v_2 - v_3) = w_1 - w_2 + w_3.$$

(i) Dimostrare che F è un isomorfismo.

(ii) Determinare la matrice di F rispetto alle basi $\mathscr{B}_V$ e $\mathscr{B}'_W$.

(iii) Trovare una base di $\operatorname{Im} F$ e di $\operatorname{Ker} F$.

(iv) Dato il sottospazio U di V generato dai vettori $v'_1 = v_1 - v_2$ e $v'_2 = v_1 + v_2$, trovare equazioni parametriche del sottospazio $F(U)$ rispetto alla base $\mathscr{B}'_W$.

(v) Determinare la matrice A' associata ad F rispetto alle basi $\overline{\mathscr{B}}_V = v_2, v_2 - v_3, v_1 - v_3$ e $\mathscr{B}'_W$.

Esercizio 13. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione 3 con base $\{ v_1, \ v_2, \ v_3 \}$. Al variare di $h \in \mathbb{R}$, si consideri l'applicazione lineare data dalle condizioni:

$$\begin{cases} f(v_1) = v_1 + 2v_2 - v_3 \\ f(v_2) = -v_1 + 2v_2 \\ f(v_3) = 3v_1 + hv_2 + (h+1)v_3 \end{cases}$$

(i) Determinare la matrice associata ad F rispetto alla base data.

(ii) Trovare l'espressione dell'immagine di un generico elemento di V.

(iii) Per quali valori di h F è un automorfismo?

(iv) Per $h = -2$, trovare una base di nucleo e immagine di F.

(v) Quando possibile, trovare la matrice associata a F^{-1} rispetto alla base data.