**Sapienza Università di Roma - Facoltà I3S**
**Corso di Laurea in Statistica Economia Finanza e Assicurazioni**
**Corso di Laurea in Statistica Economia e Società**
**Corso di Laurea in Statistica gestionale**
**Matematica II corso - A.A. 2017-2018 – prof. Cigliola**
**Foglio n.13 – Grafici di funzioni**

**Esercizio 1.** Studiare e tracciare il grafico delle seguenti funzioni:

(i) $f(x) = 9x^3 + 9x^2$

[ha un massimo relativo per $x = -\frac{2}{3}$, un minimo relativo nell'origine, un flesso per $x = -\frac{1}{3}$]

(ii) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{5}{2}x^2 + \frac{9}{4}$

[La funzione è pari e diverge positivamente per $x \to \pm\infty$. Ha un massimo relativo per $x = 0$ e due minimi assoluti per $x = \pm\sqrt{5}$, due flessi per $x = \pm\sqrt{\frac{5}{3}}$.]

(iii) $f(x) = \dfrac{x^2 + x + 4}{x^2 + 4}$

[La funzione ha un asintoto orizzontale per $x \to \pm\infty$ di equazione $y = 1$. Ha un massimo assoluto per $x = 2$ e un minimo assoluto per $x = -2$, due flessi per $x = \pm 2\sqrt{3}$; $f'(x) = \frac{4-x^2}{(x^2+4)^2}$, $f''(x) = \frac{2x(x^2-12)}{(x^2+4)^3}$]

(iv) $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 - 1}$

[La funzione è dispari, quindi ha grafico simmetrico rispetto al'origine. Ha un asintoto obliquo di equazione $y = x$ per $x \to \pm\infty$ e due asintoti verticali per $x = \pm 1$. La derivata prima è $f'(x) = \dfrac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2}$, la derivata seconda è $f''(x) = \dfrac{2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}$. La funzione ha un massimo relativo per $x = -\sqrt{3}$ e un minimo relativo per $x = \sqrt{3}$, l'origine è un punto di flesso a tangente orizzontale. $f'(x) = \frac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2}$, $f''(x) = \frac{2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}$]

(v) $f(x) = x - 2 - \sqrt{x^2 - 2x - 3}$

[Il dominio è $(-\infty, -1] \cup [3, +\infty)$. La curva ha un asintoto obliquo di equazione $y = 2x - 3$ per $x \to -\infty$ e un asintoto orizzontale di equazione $y = -1$ per $x \to +\infty$. Il punto $(-1, -3)$ è un punto di arrivo a tangente verticale, il punto $(3, 1)$ è un punto di partenza a tangente verticale. Questi due punti sono entrambi di massimo locale (non assoluto). Non ci sono flessi e la curva è sempre convessa nel suo dominio. $f'(x) = \frac{1-x+\sqrt{x^2-2x-3}}{\sqrt{x^2-2x-3}}$, $f''(x) = \frac{4}{\sqrt{(x^2-2x-3)^3}}$]

(vi) $f(x) = \dfrac{3\cos x}{2\cos x - 1}$

[La funzione è periodica di periodo $2\pi$. Conviene studiarla nel dominio $[0, \frac{\pi}{3}) \cup (\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}) \cup (\frac{5\pi}{3}, 2\pi]$ e poi ripetere il grafico su tutto l'asse reale. La funzione è positiva per $0 \leqslant x < \frac{\pi}{3}$ o $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$ oppure $\frac{5\pi}{3} < x \leqslant 2\pi$; è nulla per $x = \frac{\pi}{2}$ e $x = \frac{3\pi}{2}$; è negativa per $\frac{3\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ oppure $\frac{3\pi}{2} < x < \frac{5\pi}{2}$. Le rette $x = \frac{\pi}{3}$ e $x = \frac{5\pi}{3}$ sono asintoti verticali. La derivata prima è la funzione $f'(x) = \frac{3\sin x}{(2\cos x-1)^2}$ e si deduce che $x = 0$ e $x = 2\pi$ sono punti di minimo relativo, il punto $x = \pi$ è un punto di massimo relativo. La derivata seconda è la funzione $f''(x) = \frac{3(-2\cos^2 x - \cos x + 4)}{(2\cos x - 1)^3}$.]

(vii) $f(x) = x^2 e^{-x}$

[La funzione è sempre positiva e nulla solo nell'origine. Diverge positivamente per $x \to -\infty$ ed ha per asintoto orizzontale l'asse $x$ per $x \to -\infty$. Ha un massimo locale per $x = 2$ ed un minimo assoluto nell'origine. Ha dei flessi per $x = 2 \pm \sqrt{2}$. $f'(x) = e^{-x}(2x - x^2)$, $f''(x) = e^{-x}(x^2 - 4x + 2)$]

(viii) $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - x^2}$

[Asintoto obliquo $y = x - \frac{1}{3}$ a $\pm\infty$, cuspide nell'origine, flesso a tangente verticale in $(1,0)$, minimo locale per $x = \frac{2}{3}$. $f'(x) = \frac{x(3x-2)}{\sqrt[3]{(x-1)^2 x^4}}$, $f''(x) = \frac{-2x^2}{9\sqrt[3]{(x-1)^5 x^{10}}}$]

(ix) $f(x) = 3x^4 - 4x^3$

[Flesso nell'origine, minimo assoluto per $x = 1$.]

(x) $f(x) = \dfrac{|x(x+2)|}{x^2+1}$

[La funzione non è mai negativa, taglia l'asse $x$ nei punti $(0,0)$ e $(-2,0)$ che sono minimi assoluti non stazionari. Ha un asintoto orizzontale di equazione $y = 1$ per $x \to \pm\infty$. È conveniente ridefinire la funzione a tratti per eliminare il valore assoluto.]

(xi) $f(x) = xe^{-\frac{1}{x}}$

[La funzione è negativa sui negativi, positiva sui positivi. Può essere prolungata per continuità sulla sinistra ponendo $f(0) = 0$. L'asse $y$ è un asintoto verticale sulla sinistra (la funzione diverge a $-\infty$). La retta $y = x - 1$ è un asintoto obliquo per $x \to \pm\infty$. $f'(x) = e^{-\frac{1}{x}}\dfrac{x+1}{x}$, $f''(x) = \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^3}$]

(xii) $f(x) = \dfrac{e^x}{e^x - 1}$

[Asintoti $x = 0$, $y = 0$ e $y = 1$. Nè massimi, né minimi, né flessi. $f'(x) = \dfrac{-e^x}{(e^x-1)^2}$, $f''(x) = \dfrac{e^x(e^x+1)}{(e^x-1)^3}$.]

(xiii) $f(x) = \dfrac{x+2}{\sqrt{x^2 - x}}$

[Asintoti $x = 0$, $x = 1$, $y = -1$ e $y = 1$. Nè massimi, né minimi, né flessi; $f'(x) = \frac{2-5x}{2\sqrt{(x^2-x)^5}}$ $f''(x) = \frac{20x^2-17x+6}{4\sqrt{(x^2-x)^3}}$]

(xiv) $f(x) = \dfrac{\log x}{x}$

[Asintoti $x = 0$ e $y = 0$. Massimo in $(e, \frac{1}{e})$, flesso in $(e\sqrt{e}, \frac{3\sqrt{e}}{2e^2})$; $f'(x) = \frac{1-\log x}{x^2}$, $f''(x) = \frac{2\log x - 3}{x^3}$]

(xv) $f(x) = \arcsin\sqrt{1 - x^3}$

[Il dominio è $[0,1]$. La curva parte dal punto $(0, \frac{\pi}{2})$ da dove parte con tangente orizzontale e decresce fino al punto $(1,0)$ dove arriva con tangente verticale. Sempre concava. $f'(x) = \frac{-3x^2}{2\sqrt{x^3-x^6}}$, $f''(x) = \frac{3(2x^4+x)}{4(x^3-1)\sqrt{x^3-x^6}}$]

**Esercizio 2.** Al variare di $k \in \mathbb{R}$, contare le soluzioni dell'equazione $9x^3 + 9x^2 = k$.

[Con riferimento al grafico (i) dell'esercizio precedente, abbiamo che per $k < 0$ o $k > \frac{4}{3}$ si ha una sola soluzione, per $k = 0, \frac{4}{3}$ abbiamo due soluzioni; infine per $0 < x < \frac{4}{3}$ si hanno tre soluzioni.]

**Esercizio 3.** Al variare di $k \in \mathbb{R}$, contare le soluzioni dell'equazione $\dfrac{x^2 + x + 4}{x^2 + 4} = k$.

**Esercizio 4.** Al variare di $k \in \mathbb{R}$, contare le soluzioni dell'equazione $\log x - kx = 0$.