

**Sapienza Università di Roma**  
**Corso di laurea in Ingegneria Energetica**  
**Geometria - A.A. 2015-2016**  
**Foglio n.12 – Geometria affine dello spazio**  
**prof. Cigliola**

**Esercizio 1.** Stabilire se i seguenti punti  $A, B, C, D$  di  $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$  sono complanari:

- (i)  $A = (0, 0, 0)$      $B = (1, -1, 1)$      $C = (3, 3, 2)$      $D = (-1, -2, 1)$ ;
- (ii)  $A = (3, 1, -2)$      $B = (4, -2, 0)$      $C = (5, 2, -6)$      $D = (6, -1, -4)$ ;
- (iii)  $A = (1, 0, 0)$      $B = (0, 0, -1)$      $C = (2, 3, -2)$      $D = (2, 3, -3)$ ;
- (iv)  $A = (1, -1, 2)$      $B = (2, -2, 3)$      $C = (0, -1, -2)$      $D = (-1, -1, 2)$ ;
- (v)  $A = (2, 0, 3)$      $B = (3, 0, 4)$      $C = (3, 1, 4)$      $D = (1, 0, 2)$ .

Per ciascuna quaterna di punti complanari, determinare un piano che li contiene. È unico tale piano?

**Esercizio 2.** Stabilire se i punti  $A, B, C \in \mathbb{A}^3(\mathbb{R})$  sono allineati. In caso affermativo, determinare la retta che passa per essi, in caso negativo il piano che li contiene:

- (i)  $A = (3, 0, -2)$      $B = (4, -1, -4)$      $C = (2, 1, 0)$ ;
- (ii)  $A = (2, 2, 2)$      $B = (1, 1, -1)$      $C = (-1, 2, 3)$ ;
- (iii)  $A = (1, 0, 0)$      $B = (1, 0, -\pi)$      $C = (0, 0, 1)$ ;
- (iv)  $A = (3, 4, 2)$      $B = (5, -1, 1)$      $C = (2, -3, -2)$ ;
- (v)  $A = (-3, 2, 1)$      $B = (-4, 2, 3)$      $C = (-5, 2, -1)$ .

**Esercizio 3.** Determinare, se possibile, per ciascuna delle seguenti terne di punti dello spazio una retta ed un piano che le contiene:

- (i)  $A = (4, 2, 0)$      $B = (1, 3, 1)$      $C = (1, 3, 5)$ ;
- (ii)  $A = (1, -2, 1)$      $B = (2, -1, 2)$      $C = (1, -1, 2)$ ;
- (iii)  $A = (2, 1, 0)$      $B = (2, 0, 3)$      $C = (2, 2, -3)$ ;
- (iv)  $A = (1, -2, 1)$      $B = (2, 1, 0)$      $C = (0, -5, 2)$ ;
- (v)  $A = (1, -2, 1)$      $B = (2, 0, 3)$      $C = (1, -3, 4)$ .

**Esercizio 4.** Sia  $\{O, e_1, e_2, e_3\}$  un sistema di riferimento affine in  $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ . Si dimostri che anche  $\{O, v_1 = 2e_1 + e_2 - e_3, v_2 = -e_1 + 2e_2, v_3 = e_3\}$  è un sistema di riferimento affine in  $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ . Determinare le equazioni del cambiamento di coordinate da un sistema di riferimento all'altro.

**Esercizio 5.** Sia fissato in  $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$  un sistema di riferimento affine nel punto  $O$ . Siano  $P$  e  $Q$  due punti distinti di  $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ . Dimostrare che l'insieme dei punti  $R$  tali che  $\overrightarrow{OR} = \lambda(\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP})$ , per qualche  $\lambda \in \mathbb{R}$ , è una retta.

**Esercizio 6.** Sia fissato in  $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$  un sistema di riferimento affine nel punto  $O$ . Siano  $P$  e  $Q$  due punti distinti di  $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$  non allineati con  $O$ . Dimostrare che l'insieme dei punti  $R$  tali che  $\overrightarrow{OR} = \lambda(\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}) + \mu(\overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OP})$ , per qualche  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ , è un piano.

**Esercizio 7.** Determinare le equazioni parametriche e cartesiane della retta parallela a  $v$  e passante per  $A$ , dove:

(i)  $v = (-1, 2, 3)$       $A = (0, -3, -2)$ ;

(ii)  $v = (1, 1, 0)$       $A = (1, 1, 0)$ ;

(iii)  $v = (-\frac{1}{2}, 1, \frac{2}{3})$       $A = (-2, 1, 1)$ .

**Esercizio 8.** Determinare le equazioni parametriche e cartesiane della retta passante per i punti  $A$  e  $B$ , dove:

(i)  $A = (-1, -1, 0)$       $B = (-3, 1, 0)$ ;

(ii)  $A = (2, 1, 2)$       $B = (1, 1, -1)$ ;

(iii)  $A = (\frac{3}{2}, \frac{8}{5}, 1)$       $B = (-\frac{1}{2}, \frac{4}{5}, 3)$ .

**Esercizio 9.** (i) Dimostrare che due rette parallele sono complanari.

(ii) Dimostrare che due rette incidenti sono complanari.

**Esercizio 10.** Determinare la posizione reciproca delle rette  $r$  ed  $s$ ; se sono incidenti determinare il loro punto di intersezione, se sono complanari, determinare un piano che le contiene:

(i)  $r : \begin{cases} x + y + z = 11 \\ 2x + y - z = 0 \end{cases}$       $s : \begin{cases} x + z + 1 = 0 \\ 3x + 4y + 2 = 0 \end{cases}$

(ii)  $r : \begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2y - z = 0 \end{cases}$       $s : \begin{cases} x = t - 3 \\ y = -2t \\ z = -2t + 6 \end{cases}$

(iii)  $r : \begin{cases} x = t + 2 \\ y = -t - 1 \\ z = 3t + 4 \end{cases}$       $r : \begin{cases} x = t + 3 \\ y = t + 3 \\ z = t + 4 \end{cases}$

(iv)  $r : \begin{cases} x - y + z = 2 \\ 2y - z = 0 \end{cases}$       $s : \begin{cases} x = 2 - t \\ y = -1 + 2t \\ z = -1 + 3t \end{cases}$

(v)  $r : \begin{cases} x - y - z + 2 = 0 \\ 3y + z - 1 = 0 \end{cases}$       $s : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = 3t \end{cases}$

(vi)  $r : 1 - x = y = z - 1$       $s : \begin{cases} x = 2t - 3 \\ y = t + 1 \\ z = 3t \end{cases}$

$$(vii) \quad r : \begin{cases} x - y + z + 1 = 0 \\ y + 3z + 2 = 0 \end{cases} \quad s : \begin{cases} 2x + 8z + 1 = 0 \\ x + y + 7z - 1 = 0 \end{cases}$$

**Esercizio 11.** Siano dati nello spazio due rette sghembe  $r$  ed  $r'$  ed un punto  $P \notin r \cup r'$ . Dimostrare che esiste una retta  $s$  passante per  $P$  e complanare con  $r$  ed  $r'$ . Dedurne che la relazione di complanarit  non   transitiva nello spazio.

**Esercizio 12.** Dato il punto  $P$  e le rette sghembe  $r$  ed  $r'$ , trovare una retta  $s$  passante per  $P$  e complanare con  $r$  ed  $r'$ :

$$(i) \quad P = (0, 0, 2) \quad r : \begin{cases} 2x - z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \quad r' : \begin{cases} x + y + z - 1 = 0 \\ 3x + 2z = 0 \end{cases}$$

$$(ii) \quad P = (1, 1, -1) \quad r : \begin{cases} x = -2t \\ y = t \\ z = 1 + t \end{cases} \quad r' : \begin{cases} x + y - 3z = 2 \\ y + z = 1 \end{cases}$$

$$(iii) \quad O = (0, 0, 0) \quad r : \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \end{cases} \quad r' : \begin{cases} x = 0 \\ y - z + 1 = 0 \end{cases}$$

**Esercizio 13.** Dato il punto  $P$  e le rette sghembe  $r$  ed  $r'$ :

$$(i) \quad P = (-1, 0, 2) \quad r : \begin{cases} 2x - z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \quad r' : \begin{cases} x + y + z - 1 = 0 \\ 3x + 2z = 0 \end{cases}$$

$$(ii) \quad P = (-1, 1, -1) \quad r : \begin{cases} x = -2t \\ y = t \\ z = 1 + t \end{cases} \quad r' : \begin{cases} x + y - 3z = 2 \\ y + z = 1 \end{cases}$$

(a) trovare, se esiste, un piano  $\alpha$  passante per  $P$  e parallelo ad  $r$  ed  $r'$ ;

(b) trovare, se esiste, un piano passante per  $P$ , contenente  $r$  e parallelo a  $r'$ ;

(c) trovare, se esiste, una retta passante per  $P$  incidente sia  $r$  che  $r'$ .

**Esercizio 14.** Scrivere le equazioni cartesiane e parametriche del piano  $\pi$  passante

per i punti  $P = (1, 1, 1)$  e  $Q = (2, 1, 2)$  e parallelo alla retta  $\begin{cases} x = t \\ y = -1 - 3t \\ z = 4 - 2t \end{cases}$ .

**Esercizio 15.** Trovare una retta  $r$  passante per il punto  $P = (1, -1, 0)$  e parallela al piano  $\pi : 2x - y + 4 = 0$ .   unica tale retta?

**Esercizio 16.** Trovare il piano passante per il punto  $P = (1, 1, 5)$  e parallelo al piano  $\pi : x - 3y - z - 1 = 0$ .

**Esercizio 17.** Trovare una retta passante per  $A(3, 1, -2)$ , sghemba con  $r : \begin{cases} x = 3 + t \\ y = -t \\ z = -2 - 2t \end{cases}$

e che sia parallela al piano  $\pi : \begin{cases} x = 1 - t + t' \\ y = 3t' \\ z = -t - 2t' \end{cases}$ .

**Esercizio 18.** Al variare di  $k \in \mathbb{R}$ , classificare la posizione reciproca delle rette

$$r: \begin{cases} x = 1 + y \\ z = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad s: \begin{cases} x = 1 + kz \\ y = 0 \end{cases}$$

**Esercizio 19.** Al variare di  $k, h \in \mathbb{R}$ , classificare la posizione reciproca delle rette

$$r: \begin{cases} kx + z = 1 \\ x + z = 1 \end{cases} \quad \text{e} \quad s: \begin{cases} hx + kz = h + k \\ hx + y = h \end{cases}$$

**Esercizio 20.** Trovare le equazioni parametriche e cartesiane del piano passante per

$P(1, 2, 0)$  e contenente la retta  $\begin{cases} x + y = 0 \\ 2x + z - y + 1 = 0 \end{cases}$

**Esercizio 21.** Al variare dei parametri reali  $a$  e  $b$ , classificare la posizione reciproca

del piano  $\pi: ax + y + bz = 1$  e della retta  $r: \begin{cases} x + y + az = 1 \\ x + ay - bz = 1 \end{cases}$ .

**Esercizio 22.** Trovare, se esiste, una retta passante per il punto  $P(2, 1, -2)$  ed

incidente alle rette  $r: \begin{cases} x - z = 1 \\ y + z = 2 \end{cases}$  e  $s: \begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ x - y + z = 2 \end{cases}$

**Esercizio 23.** Rappresentare graficamente il piano di equazione  $x - 2y = 0$  e la retta

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - t \\ z = 3 \end{cases} .$$