Sapienza Università di Roma - Corso di Laurea in Ingegneria Energetica
Analisi Matematica II - A.A. 2016-2017 – prof. Cigliola
Foglio n.12 – Principio di Cavalieri e Primo teorema di Guldino

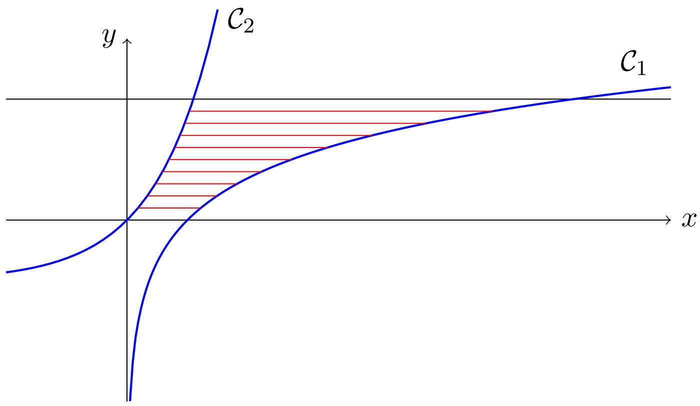
Esercizio 1. Utilizzando il principio degli indivisibili di Cavalieri, dimostrare la formula per il calcolo dell'area del trapezio, del parallelogramma, del cerchio e dell'ellisse.

Esercizio 2. Utilizzando il principio degli indivisibili di Cavalieri, dimostrare la formula per il calcolo del volume del cono, del cilindro, della sfera e della piramide retta.

Esercizio 3. Utilizzando la formula per il calcolo del volume dei solidi di rotazione, calcolare il volume del cono, del cilindro, della sfera, dell'ellissoide di rotazione (distinguendo il caso *schiacciato* ed il caso *allungato*), del tronco di cono, del segmento sferico ad una base, del segmento sferico a due basi.

Esercizio 4. Sia S la regione di piano compresa tra i grafici delle funzioni $x = e^y$ ed $x = \ln(y+1)$ per $y \in [0,2]$. Calcolare il volume del solido ottenuto dalla rotazione di S attorno all'asse y.

[È più conveniente utilizzare il teorema di Guldino. Per disegnare più facilmente i profili delle due curve conviene passare alle loro inverse $\mathcal{C}_1 : \; x = e^y \;\Leftrightarrow\; y = \ln x$ e $\mathcal{C}_2 : \; x = \ln(y+1) \;\Leftrightarrow\; y = e^x - 1$.



Applichiamo il primo teorema di Guldino. Ci serve l'ascissa x_G del baricentro di S, poiché quest'ultima indica il raggio della circonferenza descritta dalla rotazione di S attorno all'asse y. Avremo così

$$\mathcal{V} = \mathcal{A}(S)\cdot 2\pi x_G = \mathcal{A}(S)\cdot 2\pi \frac{1}{\mathcal{A}(S)} \iint_S x\,dx\,dy = 2\pi \iint_S x\,dx\,dy$$

Conviene utilizzare la descrizione di S come dominio normale rispetto all'asse y. Abbiamo

$$S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 \leqslant y \leqslant 2,\; \ln(y+1) \leqslant x \leqslant e^y\}$$

$$\mathcal{V} = 2\pi \int_0^2 dy \int_{\ln(y+1)}^{e^y} x\,dx = \frac{1}{2}\int_0^2 \left[(e^y)^2 - \ln^2(y+1)\right] dy =$$

$$= \pi \left[\frac{e^{2y}}{2} - 2(y+1) - (y+1)\ln^2(y+1) + 2(y+1)\ln(y+1)\right]_0^2 =$$

$$= \frac{\pi}{2}\left(e^4 - 6\ln^2 3 + 12\ln 3 - 9\right)$$

]

Esercizio 5. Sia T la regione di piano compresa tra il grafico della funzione $y = 2\sin x$ e l'asse x per $x \in [0, \pi]$. Calcolare il volume del solido ottenuto dalla rotazione di T attorno all'asse x.

Esercizio 6. Sia U la regione di piano compresa tra il grafico della funzione $y = 2\sin(x)$ e l'asse x per $x \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$. Calcolare il volume del solido ottenuto dalla rotazione di U attorno all'asse y.

Esercizio 7. Sia W il triangolo di vertici $(0, 1)$, $(0, 3)$ e $(2, 2)$. Calcolare il volume del solido ottenuto dalla rotazione di W attorno all'asse x.

Esercizio 8. Utilizzando il primo teorema di Guldino calcolare il volume del cono (retto), del cilindro, del tronco di cono (retto), della sfera, del toro e della semisfera.

Esercizio 9. A partire dalle formule note per i volumi dei solidi rotondi spiegare come è possibile usare il primo teorema di Guldino per calcolare le coordinate del baricentro di un trapezio rettangolo, di un trapezio isoscele, di un triangolo rettangolo, di un triangolo isoscele e di un semicerchio.