Sapienza Università di Roma - Facoltà I3S
Corso di Laurea in Statistica Economia Finanza e Assicurazioni
Corso di Laurea in Statistica Economia e Società
Corso di Laurea in Statistica gestionale
Matematica II corso - A.A. 2017-2018 – prof. Cigliola
Foglio n.11 – Teoremi sulla derivabilità

Esercizio 1. Per quali valori di h e k le seguenti funzione sono derivabili?

(i) $f(x) = \begin{cases} kx + 3 & x \geqslant 2 \\ x - 1 & x < 2 \end{cases}$ [continua per $k = -1$ ma non derivabile]

(ii) $f(x) = \begin{cases} 2x + k & x > 1 \\ h \log x + h & x \leqslant 1 \end{cases}$ [$k = 0$, $h = 2$]

(iii) $f(x) = \begin{cases} kx + 4 & x > 2 \\ x + h & x \leqslant 2 \end{cases}$ [$k = 1$, $h = 4$]

(iv) $f(x) = \begin{cases} 2x + h^2 & x \geqslant 0 \\ e^{-kx^2} + 1 & x < 0 \end{cases}$ [continua per $h = \pm\sqrt{2}$, mai derivabile in 0]

Esercizio 2. Mostrare che la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^3 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

è continua e derivabile.

Esercizio 3. Mostrare che la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x \cos \frac{1}{x} & x > 0 \\ x^2 & x \leqslant 0 \end{cases}$$

è continua ma non derivabile in $x = 0$. Determinare se esistono, le derivate destra e sinistra di f in $x = 0$.

Esercizio 4. Sia $n \geqslant 2$. Usando il teorema di Rolle, dimostrare che se una funzione continua e derivabile su $\mathbb{R}$ ammette n zeri, allora la sua derivata ammette almeno $n - 1$ zeri.

[Siano $x_1, x_2, \dots, x_n$ gli n zeri di $f(x)$. Si considerino allora gli $n - 1$ intervalli $[x_1, x_2]$, $[x_2, x_3]$, $\dots$, $[x_{n-1}, x_n]$. Sugli estremi di ciascuno di questi intervalli f assume lo stesso valore (nullo per precisione), inoltre in ciascuno di questi intervalli la funzione è continua e derivabile. Possiamo allora applicare in ciascuno di essi il teorema di Rolle: in ognuno di essi f' ha uno zero.]

Esercizio 5. Data la funzione

$$f(x) = x - x^3$$

verificare per essa il teorema di Rolle nei compatti $[-1, 0]$ e $[0, 1]$. Trovare poi in tali intervalli un x_0 tale che $f'(x_0) = 0$.

[La funzione è continua e derivabile in $\mathbb{R}$. Quindi è possibile applicare il teorema di Rolle. Risolvendo l'equazione $f'(x) = 1 - 3x^2 = 0$ si trovano i valori di $x_0 = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$.]

Esercizio 6. Mostrare che per la funzione

$$f(x) = \sqrt[3]{(x-2)^2}$$

non è possibile applicare il teorema di Rolle nell'intervallo $[0, 10]$.

[La funzione non è derivabile dove si annulla l'argomento della radice cubica: $x = 2$ che è interno all'intervallo considerato. Allora il teorema di Rolle non può essere applicato.]

Esercizio 7. Applicare il teorema degli zeri alle seguenti funzioni per localizzare le loro intersezioni con l'asse x:

(i) $f(x) = \log x + x$ $\qquad [0, 1]$

(ii) $f(x) = e^x - 2x - 3$ $\qquad [-2, -1]$ e $[1, 2]$

Esercizio 8. Dimostrare che l'equazione

$$x^3 - 2x^2 - x + 1 = 0$$

ammette esattamente tre soluzioni reali.

[La funzione è continua. Inoltre si ha che $f(0) = 1 > 0$, $f(1) < 0$, $f(3) > 0$, $f(-1) < 0$. Sicché per il teorema degli zeri la funzione ammette tre zeri localizzati negli intervalli: $[-1, 0]$, $[0, 1]$ e $[1, 3]$. Inoltre un polinomio di terzo grado non può avere più di tre zeri.]

Esercizio 9. Assegnata la funzione

$$f(x) = x - x^3$$

provare che verifica le ipotesi del teorema di Lagrange in $[-2, 1]$ e determinare esplicitamente un punto c che verifica la tesi dello stesso teorema.

[Si verifica facilmente che la funzione è continua e derivabile su tutto il suo dominio. La sua derivata prima è $f'(x) = 1 - 3x^2$ e cerchiamo le soluzioni dell'equazione $1 - 3c^2 = -2$. Si ottiene la sola soluzione accettabile $c = -1$ perché interna all'intervallo proposto.]

Esercizio 10. Sia data la funzione

$$f(x) = |1 - x^2|$$

definita nell'intervallo $[0, 2]$. Provare che non esiste alcun elemento $c \in [0, 2]$ tale che

$$f'(c) = \frac{f(2) - f(0)}{2}.$$

[La richiesta dell'esercizio ricorda la tesi del teorema di Lagrange. Per garantirci che non sia verificato, controlliamo che le ipotesi di tale teorema non sono soddisfatte.
Pur essendo continua in $[0, 2]$, la funzione in tale intervallo non è derivabile nel punto $x_0 = 1$.
Infatti il valore assoluto non è derivabile quando l'argomento si annulla.
Cominciamo col dire che $\frac{f(2)-f(0)}{2} = 1$.
Per comodità esplicitiamo il valore assoluto che definisce la funzione f:

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 1 & x \in [0, 1] \\ x^2 - 1 & x \in]1, 2] \end{cases}$$

La derivata di f definita a tratti diventa:

$$f'(x) = \begin{cases} -2x & x \in [0, 1] \\ 2x & x \in]1, 2] \end{cases}$$

Siccome in $[0, 1]$ la derivata è sempre negativa, non può esserci in tale intervallo un punto c per cui $f'(c) = 1$. Invece nell'intervallo $]1, 2]$ si avrebbe $2c = 1$ da cui $c = \frac{1}{2}$, che però non appartiene all'intervallo considerato. La tesi dell'esercizio è allora verificata.]

Esercizio 11. Determinare i valori di a e b affinché la funzione

$$f(x) = \begin{cases} e^x & x \geqslant 0 \\ 2ax^2 + x - b & x < 0 \end{cases}$$

sia derivabile. $\qquad$ [per ogni $a \in \mathbb{R}$ e per $b = -1$]

Esercizio 12. Determinare i coefficienti a, b e c della funzione

$$f(x) = ax^4 + bx + c$$

in modo che la derivata terza sia la funzione $f'''(x) = 12x$ e che la curva grafico di f passi per il punto $(0,1)$ avendo ivi come tangente la retta $y = 2x + 1$. $[\,a = 1/2,\ b = 5/2 \text{ e } c = 1\,]$

Esercizio 13. Dimostrare che l'equazione $x^3 - 3x + 5$ non può avere soluzioni nell'intervallo $(0,1)$.

Esercizio 14. Provare che l'equazione $3x^5 + 15x - 1 = 0$ ha esattamente una radice reale.

Esercizio 15. Applicare il teorema di Lagrange alla funzione

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3-x^2}{2} & \text{per } x \in [0,\,1] \\ \dfrac{1}{x} & \text{per } x \in (1,2] \end{cases}$$

$[\,$usando entrambi i rami della funzione, si trovano i punti $c = \frac{1}{2}$ e $c = \sqrt{2}\,]$

Esercizio 16. Studiare la derivabilità nell'origine per le seguenti funzioni:

(i) $f(x) = \begin{cases} x+1 & x < 0 \\ e^x & x \geqslant 0 \end{cases}$

(ii) $f(x) = \begin{cases} x^2+1 & x < 0 \\ \cos x & x \geqslant 0 \end{cases}$

(iii) $f(x) = \dfrac{x^2 + |x^3|}{|x+2|}$

Esercizio 17. Determinare gli intervalli di monotonia delle seguenti funzioni:

(i) $f(x) = x(x-1)^2$ $[\,$cresc. per $x < \frac{1}{3}$ e per $x > 1$, decr. per $\frac{1}{3} < x < 1\,]$

(ii) $f(x) = \sqrt{x+1}$ $[\,$cresc. per $x > -1\,]$

(iii) $f(x) = \dfrac{3x^2-1}{(x^2+1)^3}$ $[\,$cresc. per $x < -1$ e per $0 < x < 1$, decr. per $-1 < x < 0$ e per $x > 1\,]$

(iv) $f(x) = xe^x$ $[\,$cresc. per ogni valore di $x\,]$

(v) $f(x) = \dfrac{e^x}{x}$ $[\,$cresc. per $x > 1$, decr. per $x < 0$ e $0 < x < 1\,]$

(vi) $f(x) = \log(x + \sqrt{x^2+1})$ $[\,$cresc. per ogni valore di $x\,]$

(vii) $f(x) = x - 2\sin x$ $[\,$cresc. per $\frac{\pi}{3} < x < \frac{5\pi}{3}$, ... $]$

(viii) $f(x) = \operatorname{arctg} x - x$ $[\,$decresc. per ogni valore della $x\,]$

(ix) $f(x) = \arcsin(x+1)$ $[\,$cresc. per $-2 < x < 0\,]$

Esercizio 18. Dimostrare che la funzione

$$f(x) = e^x + \sin x$$

è invertibile in un intorno di $x_0 = 0$. Calcolare la derivata della funzione inversa di f nel punto $y_0 = 1$.

Esercizio 19. Dimostrare che la funzione

$$f(x) = e^x + \log x$$

è invertibile (precisando l'insieme immagine). Calcolare la derivata della funzione inversa di f nel punto $y_0 = e$.

[Il dominio della funzione è $(0,+\infty)$. La derivata è $f'(x) = e^x + \frac{1}{x}$ che è strettamente positiva nel dominio di f. Allora f è strettamente crescente e quindi iniettiva nel suo dominio. Inoltre, per il teorema dei limiti sulle funzioni monotone, $\inf f = \lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$ e $\sup f = \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Per il teorema dei valori intermedi, essendo f continua nel suo dominio, essa ha per immagine l'intero insieme $(-\infty,+\infty) = \mathbb{R}$. Per calcolare la derivata della funzione inversa in $y_0 = e$, dobbiamo prima cercare la controimmagine di y_0 secondo f. Si trova facilmente che $f(1) = e^1 + 0 = e = y_0$. Quindi, usando il teorema di derivazione della funzione inversa, $(f^{-1})'(e) = \frac{1}{f'(e)} = \frac{1}{e+1}$.]

Esercizio 20. Dimostrare che per ogni $x > 0$ si ha che

$$\log(x+1) > \frac{x}{x+1}.$$

[Sia dato il numero reale $x > 0$. Applichiamo il teorema di Lagrange alla funzione $f(t) = \log(t+1) - \dfrac{t}{t+1}$ nell'intervallo $[0,x]$. Si controlli che essa verifichi tutte le ipotesi di detto teorema. La sua derivata è la funzione $f(t) = \frac{x}{(x+1)^2}$. Dalla tesi del teorema di L. segue che esiste $\xi \in [0,x]$ tale che $\frac{f(x)-f(0)}{x} = f'(\xi)$. Sostituendo, si trova: $\log(x+1) - \dfrac{x}{x+1}x = x \cdot \dfrac{\xi}{(\xi+1)^2}$. Poiché la quantità a destra è strettamente positiva, si ha anche che $\log(x+1) - \dfrac{x}{x+1}x > 0$ e quindi che $\log(x+1) > \dfrac{x}{x+1}$.]

Esercizio 21. Si calcolino i seguenti limiti:

(i) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x - \operatorname{arctg} x}{\arcsin x - x}$ [2]

(ii) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x^2}{\log\cos(2x^2 - x)}$ [−6]

(iii) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 + \log(1-x)}{\operatorname{tg} x - x}$ [$-\frac{1}{2}$]

(iv) $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} \frac{\sqrt{x} + \sqrt{x-1} - 1}{\sqrt{x^2-1}}$ [$\frac{\sqrt{2}}{2}$]

(v) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x e^{\frac{x}{2}}}{x + e^x}$ [0]

(vi) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\log(1+2e^x)}{\sqrt{x^2+1}}$ [1]

(vii) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\log\sqrt[3]{x^3+x^2}}{\log x}$ [1]

(viii) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\log\sin 2x}{\log\sin x}$ [1]

(ix) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x^2 \log x$ [1]

(x) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^2 \log\cos\frac{1}{x}$ [$-\frac{1}{2}$]

(xi) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} (\pi - 2x)\operatorname{tg} x$ [2]

(xii) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \log x \log(x-1)$ [0]

(xiii) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1}\right)$ [$\frac{1}{2}$]

(xiv) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(x - x^2 \log\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right)$

[si raccolga x^2, si applichi il teorema di De l'Hopital, si usi la sostituzione $t = \frac{1}{x}$, il limite vale $\frac{1}{2}$]

(xv) $\lim_{x \to 0} (1+x)^{\log x}$ [1]

(xvi) $\lim_{x \to 0} \left(\frac{(x+1)^{\frac{1}{x}}}{e} \right)^{\frac{1}{x}}$ [$\frac{1}{\sqrt{e}}$]

Esercizio 22. Dimostrare che

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0,$$

per ogni intero $n > 0$.

Esercizio 23. Dimostrare che

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\log_a x}{x^\alpha} = 0,$$

per ogni numero reale $\alpha > 0$ e $a > 0$ e $a \neq 1$.

Esercizio 24. Calcolare il differenziale delle seguenti funzioni:

(i) $y = \operatorname{arctg} x$ [$dy = \frac{1}{x^2+1} dx$]

(ii) $y = \cos x$ [$dy = -\sin x \, dx$]

(iii) $y = e^{t^3}$ [$dy = 3t^2 e^{t^3} dt$]

Esercizio 25. Calcolare un valore approssimato di $\arcsin 0,51$.

[Ci viene in aiuto il differenziale della funzione $f(x) = \arcsin x$. Poniamo $x_0 = 0,5$ e $dx = 0,01$. Sappiamo che $df = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$, da cui

$$f(x_0+dx) = f(x_0)+f'(x_0)dx = \arcsin 0,5 + \frac{0,01}{\sqrt{1-(0,5)^2}} = \frac{\pi}{6} + \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{100} \simeq 0,523598+0,011547 = 0,535145$$

Confrontando il valore ottenuto con quello calcolato da una calcolatrice (0,53518479...), si trova che i primi quattro decimali sono esatti.]

Esercizio 26. Calcolare un valore approssimato di $\sqrt{4,3871}$.

Esercizio 27. Calcolare un valore approssimato di $\sqrt{15,8}$.

Esercizio 28. Calcolare un valore approssimato di $\operatorname{arctg} 1,005$.