Sapienza Università di Roma – Corso di laurea in Ingegneria Elettrotecnica
Geometria - A.A. 2017-2018 – prof. Cigliola
Foglio n.11 – Geometria affine del piano

Esercizio 1. Per ciascuna delle seguenti terne di punti A, B, C del piano affine $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$, determinare, se possibile, un quarto punto D affinché $ABCD$ sia un parallelogramma:

(i) $A = (1,3) \qquad B = (-5,1) \qquad C = (3,-5)$;

(ii) $A = (1,1) \qquad B = (-5,-5) \qquad C = (3,3)$;

(iii) $A = (-1,2) \qquad B = (-2,1) \qquad C = (3,-4)$;

(iv) $A = (0,3) \qquad B = (-3,0) \qquad C = (3,0)$;

(v) $A = (0,3) \qquad B = (1,5) \qquad C = (-2,-1)$;

(vi) $A = (e,\pi) \qquad B = (\pi,e) \qquad C = (0,0)$.

Per ciascuno dei parallelogrammi costruiti, si trovi l'equazione delle rette su cui giacciono i suoi lati.

Esercizio 2. Dati il vettore $v \in \mathcal{V}^2$ ed il punto $P \in \mathbb{A}^2(\mathbb{R})$, determinare l'unico punto $Q \in \mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ tale che $\overrightarrow{PQ} = v$:

(i) $v = (-1,2) \qquad P = (3,-1)$;

(ii) $v = (1,\frac{1}{2}) \qquad P = (2,1)$;

(iii) $v = (0,0) \qquad P = (3,-2)$;

(iv) $v = (1,2) \qquad P = (\sqrt{3},-1)$;

(v) $v = (2,\pi) \qquad P = (0,-\pi)$.

Esercizio 3. Sia $\{\, O, e_1, e_2 \,\}$ un sistema di riferimento affine in $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$. Si dimostri che anche $\{\, O,\, v_1 = 2e_1 + e_2,\, v_2 = -e_1 + 2e_2 \,\}$ è un sistema di riferimento affine in $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$.

Esercizio 4. Per ciascun vettore $v \in \mathcal{V}^2(\mathbb{R})$ e per ogni punto $A \in \mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ determinare le equazioni parametriche e cartesiane della retta parallela a v passante per A:

(i) $v = (-1,3) \qquad A = (-3,-2)$; $\qquad [\begin{cases} x = -3 - t \\ y = -2 + 3t \end{cases} \qquad 3x + y + 11 = 0]$

(ii) $v = (1,1) \qquad A = (-2,-5)$; $\qquad [\begin{cases} x = -2 + s \\ y = -5 + s \end{cases} \qquad x - y - 3 = 0]$

(iii) $v = (-1,\frac{1}{3}) \qquad A = (-13,52)$; $\qquad [\begin{cases} x = -13 - t \\ y = 52 + \frac{1}{3}t \end{cases} \qquad \frac{1}{3}x + y + 52 = 0]$

(iv) $v = (-\sqrt{2},0) \qquad A = (0,0)$; $\qquad [\begin{cases} x = t \\ y = 0 \end{cases} \qquad y = 0]$

(v) $v = (-2,1) \qquad A = (-3,-2)$. $\qquad [\begin{cases} x = -3 - 2t \\ y = -2 + t \end{cases} \qquad x + 2y + 7 = 0]$

Esercizio 5. Determinare le equazioni parametriche e cartesiane della retta passante per i punti A e B, dove:

(i) $A = (-1,4) \qquad B = (3,1)$; $\qquad [3x + 4y - 13 = 0, \quad \begin{cases} x = -1 + 4t \\ y = 4 - 3t \end{cases}]$

(ii) $A = (1,2) \qquad B = (-1,-1)$; $\qquad [3x - 2y + 1 = 0]$

(iii) $A = (\pi,2) \qquad B = (\pi,1)$; $\qquad [x = \pi, \quad \begin{cases} x = \pi \\ y = t \end{cases}]$

(iv) $A = (1,5)$ $B = (-\frac{1}{2}, 5)$; [$y = 5$]

(v) $A = (3,-2)$ $B = (3,1)$. [$x = 3$, $\begin{cases} x = 3 \\ y = t \end{cases}$]

Esercizio 6. Stabilire se i punti A, B, C sono allineati. In caso affermativo, determinare la retta che li contiene:

(i) $A = (-1,2)$ $B = (2,3)$ $C = (-1,3)$; [non allineati]

(ii) $A = (-1,2)$ $B = (2,2)$ $C = (-1,2)$; [$y = 2$]

(iii) $A = (1,-2)$ $B = (-3,1)$ $C = (-2, \frac{2}{3})$; [non allineati]

(iv) $A = (-1,2)$ $B = (0,5)$ $C = (1,8)$; [$y = 3x + 5$]

(v) $A = (2,3)$ $B = (7,0)$ $C = (-3,-6)$.

Esercizio 7. Determinare la posizione reciproca delle rette r ed s e, se sono incidenti, determinare il loro punto di intersezione:

(i) $r: \ 2x - 3y - 1 = 0$ $s: \ 4x - 6y + 2 = 0$; [parallele]

(ii) $r: \ x + 2y - 2 = 0$ $s: \ -3x + 2y + 1 = 0$; [incidenti in $(3/4, 5/8)$]

(iii) $r: \ -3x - 2y - 1 = 0$ $s: \ 4x - 6y + 2 = 0$;

(iv) $r: \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 2 + 3t \end{cases}$ $s: \ 2x - 3y + 2 = 0$;

(v) $r: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -2 - 4t \end{cases}$ $s: \ 4x + y + 2 = 0$; [parallele]

(vi) $r: \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -1 \end{cases}$ $s: \ x - y + \sqrt{2} = 0$; [incidenti in $(-1 - \sqrt{2}, -1)$]

(vii) $r: \begin{cases} x = 2 - 5t \\ y = -2 + 3t \end{cases}$ $s: \ 5x - 2 = 0$;

(viii) $r: \begin{cases} x = 2 - 5t \\ y = -2 + 3t \end{cases}$ $s: \begin{cases} x = 1 + 5t \\ y = 7 - 3t; \end{cases}$ [parallele]

(ix) $r: \begin{cases} x = 2 - 5t \\ y = -2 + 3t \end{cases}$ $s: \begin{cases} x = -3 + 5t \\ y = 1 - 3t; \end{cases}$ [parallele]

(x) $r: \begin{cases} x = 4t \\ y = -3 - 2t \end{cases}$ $s: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2t; \end{cases}$

(xi) $r: \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 0 \end{cases}$ $s: \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 - 3t. \end{cases}$

Esercizio 8. Trovare l'equazione della retta passante per il punto d'intersezione delle rette r : $3x - y + 7 = 0$, r' : $y = x + 5$ e parallela alla retta s : $2x - 4y - 1 = 0$.

Esercizio 9. Determinare tutte le rette del piano che

(i) sono disgiunte dalla retta $2x - y + 3 = 0$. [le rette di tipo $ax + by + c = 0$ con $a + 2b \neq 0$]

(ii) non passano per l'origine. [le rette di tipo $ax + by + c = 0$ con $c \neq 0$]

(iii) non passano per il punto $A = (2, -1)$.

Esercizio 10. Al variare di $k, h \in \mathbb{R}$, classificare la posizione reciproca delle rette

$$r: \; kx + y - 1 = 0 \qquad \text{e} \qquad r': \; x + ky - h = 0.$$

[le rette sono incidenti per $k \neq \pm 1$ (si dica in quale punto); per $k = h = 1$ le rette coincidono con $x + y = 1$; per $k = h = -1$ le rette coincidono con $x - y = -1$; nei casi rimanenti sono parallele]

Esercizio 11. Al variare di $k, h \in \mathbb{R}$, stabilire se i seguenti punti sono allineati: $A(1, 1+k)$, $B(-1, 2k)$ e $C(k, k)$. [allineati se e solo se $k = 1 \pm \sqrt{2}$]