Sapienza Università di Roma - Corso di Laurea in Ingegneria Energetica
Analisi Matematica II - A.A. 2016-2017 – prof. Cigliola
Foglio n.10 – Massimi e minimi in due variabili

Esercizio 1. Si calcolino il gradiente ed i punti stazionari delle seguenti funzioni:

(i) $f(x,y) = e^x(2x^2 - xy + y^2)$;
$[\nabla f(x,y) = (e^x(2x^2 - xy + y^2 + 4x - y),\, e^x(2y - x)),\ P_1 = (0,0),\ P_2 = (-2,-1)]$

(ii) $f(x,y) = \frac{xy^3}{3} + \frac{1}{2}x^2y + \frac{1}{2}y^2$.

Esercizio 2. Si determinino i punti stazionari delle seguenti funzioni e si classifichi la loro natura:

(i) $f(x,y) = x^3 + y^3 - xy$; $[(0,0)$ sella, $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$ minimo relativo$]$

(ii) $f(x,y) = (x-y)(x+3y)(x+1)$;
$[(0,0)$, $(-1,-1)$, e $(-1,1/3)$ punti di sella; $(-2/3, -2/9)$ massimo relativo$]$

(iii) $f(x,y) = e^{x+y} - x + y^2$; $[\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$ minimo relativo$]$

(iv) $f(x,y) = \log(x^2y + 6x - y)$. $[(1,-3)$ e $(-1,3)$ punti di sella$]$

Esercizio 3. Si determinino i punti di massimo e minimo relativo delle seguenti funzioni:

(i) $f(x,y) = x^2 + y^2$; $[(0,0)$ minimo e $\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$ massimo relativi$]$

(ii) $f(x,y) = x^4 - y^4$;

(iii) $f(x,y) = e^{x^3-y^3+xy}$; $[\left(\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right)$ minimo relativo$]$

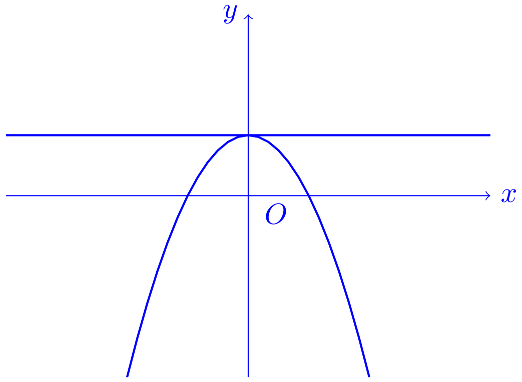
(iv) $f(x,y) = \frac{1}{y} + \frac{y}{x} + y^2 + x$.
$[\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}, \frac{1}{\sqrt[3]{4}}\right)$ minimo relativo; $\left(\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right)$ minimo relativo$]$

(v) $f(x,y) = x^4 + (y-1)^2$

Esercizio 4. Si studino i punti stazionari della funzione

$$f(x,y) = (y-1)^2(x^2 + y - 1).$$

[Si trova che $\nabla f(x,y) = (2x(y-1)^2; (y-1)(2x^2 + 3y - 3))$, da cui segue che i punti stazionari di f sono tutti e soli i punti della forma $(x,1)$, ovvero i punti che giacciono sulla retta orizzontale $y = 1$. La matrice hessiana è $H_f(x,y) = \begin{pmatrix} (2(y-1)^2 & 4x(y-1) \\ 4x(y-1) & 2(x^2+y-1) + 4(y-1)) \end{pmatrix}$, che nei punti di tipo $(x,1)$ diventa $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2x^2 \end{pmatrix}$. Poiché il determinante hessiano è identicamente nullo sui punti critici di f, i criteri noti non sono utilizzabili. Ingegniamoci diversamente. Studiamo il segno della funzione $F(x,y) = f(x,y) - f(x,1)$. Se in un intorno di $(x_0,1)$ la F ha segno positivo, allora il punto $(x_0,1)$ è minimo per f, se invece il segno è negativo, allora $(x_0,1)$ è di massimo locale per f. Infine, nei punti $(x_0,1)$ in cui la F cambia segno, corrispondentemente la f ha una sella. Si trova che $F(x,y) = x^2 + y - 1 \geqslant 0$, quindi la F è positiva per $y \geqslant 1 - x^2$, cioè al di sopra della parabola disegnata in figura:



Quindi su tutti i punti della retta $y = 1$, escluso $(0,1)$, sono dei punti di minimo locale, invece, poiché in $(0,1)$ c'è variazione di segno per F, si ha che $P(0,1)$ è un punto di sella per f.]

Esercizio 5. Dimostrare che una matrice quadrata di ordine 2, simmetrica e indefinita ha necessariamente rango massimo.