Università degli Studi di Roma La Sapienza
Corso di laurea in Ingegneria Energetica
Geometria A.A. 2014-2015
Foglio di esercizi n.8 (prof. Cigliola)

Esercizio 1. Dimostrare che le seguenti applicazioni sono lineari:

(i) $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \qquad F(x, y) = (x + 2y, 2x + y, x - y);$

(ii) $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \qquad F(x, y) = (x - z, x + y - z, x - y);$

(iii) $F : M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}_{\leqslant 1}[x], \qquad F\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a - b) + (c + 2d)x.$

Esercizio 2. Provare che le seguenti applicazioni non sono lineari:

(i) $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad F(x, y) = \sin x - y;$

(ii) $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad F(x, y) = x^2 y;$

(iii) $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad F(x, y) = 3x - y + 2;$

(iv) $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \qquad F(x) = |x|.$

Esercizio 3. Siano V e W due spazi vettoriali. Siano poi F e G due applicazioni lineari da V a W. Dimostrare che l'applicazione $F + G : V \longrightarrow W$ definita da

$$(F + G)(v) = F(v) + G(v)$$

è un'applicazione lineare da V in W.

Esercizio 4. Sia data l'applicazione lineare $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tale che

$$F(x, y) = (x + 2y, 3y, x - y).$$

(i) Trovare $F^{-1}(5, 6, -1)$.

(ii) Trovare la matrice associata ad F rispetto alle basi canoniche di $\mathbb{R}^2$ e di $\mathbb{R}^3$.

(iii) Trovare la matrice associata ad F rispetto alle basi $\{ (1, 0), (-1, -1) \}$ di $\mathbb{R}^2$ e $\{ (1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 0, 1) \}$ di $\mathbb{R}^3$.

(iv) Stabilire se F è iniettiva o suriettiva.

(v) Trovare una base dell'immagine e del nucleo di F.

Esercizio 5. Si consideri l'applicazione $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tale che

$$F(x, y, z) = (x - y, z).$$

(i) Determinare la controimmagine di $(2,2)$ sotto l'azione di F.

(ii) Determinare la matrice associata ad F rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$ e alla base $\{ (1,1),(-1,1) \}$ di $\mathbb{R}^2$.

(iii) Determinare una base e la dimensione di $\operatorname{Im} F$ e di $\operatorname{Ker} F$.

Esercizio 6. Si consideri l'applicazione $F:\mathbb{R}^3 \longrightarrow M_2(\mathbb{R})$ tale che

$$F(x,y,z)=\begin{pmatrix} x+y & x-y \\ x-y & z \end{pmatrix}.$$

(i) Determinare la controimmagine di della matrice identica I_2 sotto l'azione di F.

(ii) Determinare la matrice associata ad F rispetto alle basi canoniche di $\mathbb{R}^3$ e di $M_2(\mathbb{R})$.

(iii) Determinare una base e la dimensione di $\operatorname{Im} F$ e di $\operatorname{Ker} F$.

(iv) Stabilire se F è iniettiva o suriettiva.

Esercizio 7. Trovare, se esistono, tutte le applicazioni lineari $F:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tali che

$$F(0,1,1)=(1,-1,-1) \qquad F(1,1,-1)=(0,0,2) \qquad F(2,-3,1)=(-1,-1,-2)$$

Esercizio 8. Trovare, se esistono, tutte le applicazioni lineari $F:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tali che $F(1,1)=(1,-1,-1)$.

Esercizio 9. Trovare, se esistono, tutte le applicazioni lineari $F:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tali che

$$F(1,1)=(1,-1,-1) \qquad F(-1,-1)=(-1,1,1) \qquad F(1,0)=(1,0,-3).$$

Esercizio 10. Trovare, se esistono, tutte le applicazioni lineari $F:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tali che

$$F(1,1,-1)=(1,-1,-1) \qquad F(1,0,1)=(-1,-2,1) \qquad F(0,1,-2)=(2,1,-2).$$

Esercizio 11. Costruire, se possibile, un'applicazione lineare $F:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ che abbia come nucleo il sottospazio $U=\mathcal{L}((1,1,0),(-1,1,1))$. È unica tale applicazione?

Esercizio 12. Costruire l'applicazione lineare $F:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ che ha come nucleo il sottospazio $U=\mathcal{L}((1,1,0),(-1,1,1))$ e tale che $F(0,-1,3)=(2,2,-2)$. Scrivere le equazioni di F rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$.

Esercizio 13. Sia data l'applicazione lineare $F:\mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ che ha per matrice associata rispetto alla base canonica la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(i) Trovare l'immagine diretta del sottospazio $U=\mathcal{L}((1,0,1,0),(1,-1,0,0))$.

(ii) Scrivere esplicitamente le equazioni di F (rispetto alle basi canoniche).

(iii) Determinare $F^{-1}(1,0,0)$.

(iv) Trovare una base e la dimensione di $\operatorname{Im} F$ e $\operatorname{Ker} F$.

Esercizio 14. Sia data l'applicazione lineare $F : \mathbb{R}_{\leqslant 2} \longrightarrow M_2(\mathbb{R})$ tale che

$$F(f(x)) = \begin{pmatrix} f(1) & f(0) \\ f(-1) & f(0) \end{pmatrix}$$

(i) Trovare l'immagine diretta del sottospazio $U = \mathcal{L}(1+x,\ x^2-1)$.

(ii) Scrivere esplicitamente le equazioni di F (rispetto alle basi canoniche).

(iii) Provare che la controimmagine della matrice identica I_2 sotto F è vuota.

(iv) Trovare una base e la dimensione di $\operatorname{Im} F$ e $\operatorname{Ker} F$.

Esercizio 15. Siano V uno spazio vettoriale ed $F : V \longrightarrow V$ un isomorfismo. Siano U e W due sottospazi di V tali che $U \oplus W = V$. Provare che anche $F(U) \oplus F(W) = V$.

Esercizio 16. Sia $F : M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}_{\leqslant 2}[x]$ l'applicazione tale che

$$F\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a + (b+d)x + cx^2$$

(i) Provare che F è un'applicazione lineare.

(ii) Determinare $\operatorname{Im} F$ e $\operatorname{Ker} F$, una loro base e le loro dimensioni.

(iii) Scrivere la matrice associata ad F rispetto alle basi $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ di $M_2(\mathbb{R})$ e $\{\, x^2-1, x+1, 2-x \,\}$ di $\mathbb{R}_{\leqslant 2}[x]$.

Esercizio 17. Siano dati due spazi vettoriali V e W con basi rispettivamente $\mathcal{B}_V = \{\, v_1, v_2, v_3 \,\}$ e $\mathcal{B}'_W = \{\, w_1, w_2, w_3 \,\}$. Sia data l'applicazione lineare $F : V \longrightarrow W$ tale che

$$F(v_1+v_3) = w_1 + w_2 \qquad F(v_2) = w_3 \qquad F(v_2 - v_3) = w_1 - w_2 + w_3.$$

(i) Dimostrare che F è un isomorfismo.

(ii) Determinare la matrice di F rispetto alle basi $\mathcal{B}_V$ e $\mathcal{B}'_W$.

(iii) Trovare una base di $\operatorname{Im} F$ e di $\operatorname{Ker} F$.

(iv) Dato il sottospazio U di V generato dai vettori $v'_1 = v_1 - v_2$ e $v'_2 = v_1 + v_2$, trovare equazioni parametriche del sottospazio $F(U)$ rispetto alla base $\mathcal{B}'_W$.

(v) Determinare la matrice A' associata ad F rispetto alle basi $\overline{\mathcal{B}}_V = v_2, v_2 - v_3, v_1 - v_3$ e $\mathcal{B}'_W$.