Università degli Studi di Roma La Sapienza
Corso di laurea in Ingegneria Energetica
Geometria A.A. 2014-2015
Foglio di esercizi n.6 (prof. Cigliola)

Esercizio 1. Per ciascuna delle seguenti terne di punti A, B, C del piano affine $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$, determinare, se possibile, un quarto punto D affinché $ABCD$ sia un parallelogramma:

(i) $A = (1,3) \qquad B = (-5,1) \qquad C = (3,-5)$;

(ii) $A = (1,1) \qquad B = (-5,-5) \qquad C = (3,3)$;

(iii) $A = (-1,2) \qquad B = (-2,1) \qquad C = (3,-4)$;

(iv) $A = (0,3) \qquad B = (-3,0) \qquad C = (3,0)$;

(v) $A = (0,3) \qquad B = (1,5) \qquad C = (-2,-1)$;

(vi) $A = (e,\pi) \qquad B = (\pi,e) \qquad C = (0,0)$.

Per ciascuno dei parallelogrammi costruiti, si trovi l'equazione delle rette su cui giacciono i suoi lati.

Esercizio 2. Dato il vettore $v \in \mathcal{V}_O^2$ ed il punto $P \in \mathbb{A}^2(\mathbb{R})$, determinare l'unico punto $Q \in \mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ tale che $\overrightarrow{PQ} = v$:

(i) $v = (-1,2) \qquad P = (3,-1)$;

(ii) $v = (1,\frac{1}{2}) \qquad P = (2,1)$;

(iii) $v = (3,-2) \qquad P = (3,-2)$;

(iv) $v = (1,2) \qquad P = (\sqrt{3},-1)$;

(v) $v = (2,\pi) \qquad P = (0,-\pi)$.

Esercizio 3. Sia O, e_1, e_2 un sistema di riferimento affine in $\mathcal{V}_O^2$. Si consideri il seguente sottoinsieme di $\mathcal{V}_O^2$:

$$W = \left\{ \overrightarrow{OP} = (x,y) \,\middle|\, x,y \in \mathbb{Q} \right\}$$

Stabilire se W è un sottospazio vettoriale di $\mathcal{V}_O^2$.

Esercizio 4. Sia $\{ O, e_1, e_2 \}$ un sistema di riferimento affine in $\mathcal{V}_O^2$. Si consideri il seguente sottoinsieme di $\mathcal{V}_O^2$:

$$U = \left\{ \overrightarrow{OP} = (x,y) \,\middle|\, x - y = 0 \right\}$$

Stabilire se W è un sottospazio vettoriale di $\mathcal{V}_O^2$. Calcolare la dimensione di U.

Esercizio 5. Sia $\{ O, e_1, e_2 \}$ un sistema di riferimento affine in $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$. Si dimostri che anche $\{ O,\ v_1 = 2e_1 + e_2,\ v_2 = -e_1 + 2e_2 \}$ è un sistema di riferimento affine in $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$. Determinare le equazioni del cambiamento di coordinate da un sistema di riferimento all'altro.

Esercizio 6. Siano P e Q due punti distinti di $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$. Dimostrare che l'insieme dei punti R tali che

$$\overrightarrow{PR} = \lambda\, \overrightarrow{QR},$$

per qualche $\lambda \in \mathbb{R}$ è una retta.

Esercizio 7. Per ciascun vettore $v \in \mathcal{V}^2(\mathbb{R})$ e per ciascun punto $A \in \mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ determinare le equazioni parametriche e cartesiane della retta parallela a v passante per A:

(i) $v = (-1, 3) \qquad A = (-3, -2)$;

(ii) $v = (1, 1) \qquad A = (-2, -5)$;

(iii) $v = (-1, \frac{1}{3}) \qquad A = (-13, 52)$;

(iv) $v = (-\sqrt{2}, 0) \qquad A = (0, 0)$;

(v) $v = (-2, 1) \qquad A = (-3, -2)$.

Esercizio 8. Determinare le equazioni parametriche e cartesiane della retta passante per i punti A e B, dove:

(i) $A = (-1, 4) \qquad B = (3, 1)$;

(ii) $A = (1, 2) \qquad B = (-1, -1)$;

(iii) $A = (\pi, 2) \qquad B = (\pi, 1)$;

(iv) $A = (1, 5) \qquad B = (-\frac{1}{2}, 5)$;

(v) $A = (3, -2) \qquad B = (3, 1)$.

Esercizio 9. Stabilire se i punti A, B, C sono allineati. In caso affermativo, determinare la retta che li contiene:

(i) $A = (-1, 2) \qquad B = (2, 3) \qquad C = (-1, 3)$;

(ii) $A = (-1, 2) \qquad B = (2, 2) \qquad C = (-1, 2)$;

(iii) $A = (1, -2) \qquad B = (-3, 1) \qquad C = (-2, \frac{2}{3})$;

(iv) $A = (-1, 2) \qquad B = (0, 5) \qquad C = (1, 8)$;

(v) $A = (2, 3) \qquad B = (7, 0) \qquad C = (-3, -6)$.

Esercizio 10. Determinare la posizione reciproca delle rette r ed s e, se sono incidenti, determinare il loro punto di intersezione:

(i) $r: \; 2x - 3y - 1 = 0 \qquad s: \; 4x - 6y + 2 = 0;$

(ii) $r: \; x + 2y - 2 = 0 \qquad s: \; -3x + 2y + 1 = 0;$

(iii) $r: \; -3x - 2y - 1 = 0 \qquad s: \; 4x - 6y + 2 = 0;$

(iv) $r: \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 2 + 3t \end{cases} \qquad s: \; 2x - 3y + 2 = 0;$

(v) $r: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -2 - 4t \end{cases} \qquad s: \; 4x + y + 2 = 0;$

(vi) $r: \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -1 \end{cases} \qquad s: \; x - y + \sqrt{2} = 0;$

(vii) $r: \begin{cases} x = 2 - 5t \\ y = -2 + 3t \end{cases} \qquad s: \; 5x - 2 = 0;$

(viii) $r: \begin{cases} x = 2 - 5t \\ y = -2 + 3t \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x = 1 + 5t \\ y = 7 - 3t \end{cases};$

(ix) $r: \begin{cases} x = 2 - 5t \\ y = -2 + 3t \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x = 1 + 5t \\ y = 2 - 3t \end{cases};$

(x) $r: \begin{cases} x = 4t \\ y = -3 - 2t \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2t \end{cases};$

(xi) $r: \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 0 \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 - 3t \end{cases}.$

Esercizio 11. Utilizzando esclusivamente la nozione di fascio, determinare:

(i) la retta parallela a $r: \; 3x - 2y + 3 = 0$ passante per $A = (-1, 3)$;

(ii) la retta passante per $A = (-2, 3)$ e parallela a $r: \; 4x - 2y + 3 = 0$;

(iii) la retta passante per $A = (-2, 1)$ e $B = (-3, 2)$.

Esercizio 12. Determinare il fascio di rette

(i) passanti per il punto $(-2, 7)$;

(ii) parallele al vettore $v = (-1, 1)$;

(iii) parallele alla retta $r: \begin{cases} x = 2 - 5t \\ y = -2 + 3t \end{cases}$;

(iv) contenente le rette $r: \; 2x - 3y + 1 = 0$ e $s: \begin{cases} x = 2 - 5t \\ y = -2 + 3t \end{cases}$;

(v) contenente le rette $r: \; x - 2y = 0$ e $2x - 4y + 100 = 0$.

Esercizio 13. Trovare l'equazione della retta per il punto d'intersezione delle rette $3x - y + 7 = 0$, $y = x + 5$ e parallela alla retta $2x - 4y - 1 = 0$.

Esercizio 14. Determinare tutte le rette del piano che sono disgiunte dalla retta $2x - y + 3 = 0$.

Esercizio 15. Determinare tutte le rette del piano che non passano per l'origine.

Esercizio 16. Determinare tutte le rette del piano che non passano per il punto $A = (2, -1)$.

Esercizio 17. Determinare le rette del piano che non appartengono al fascio

$$\mathscr{F}: \; 2x - 2y + k = 0,$$

con $k \in \mathbb{R}$.

Esercizio 18. Tra le rette del fascio

$$\mathscr{F}: \; \lambda x + 2\mu y - \lambda + 3\mu = 0$$

(i) determinare le rette passanti per il punto $(1, 2)$;

(ii) trovare le rette che non sono parallele all'asse x;

(iii) trovare le rette che non intersecano $2x - 3y + 2 = 0$.