Università degli Studi di Roma La Sapienza
Corso di laurea in Ingegneria Energetica
Geometria A.A. 2014-2015
Foglio di esercizi n.1 (prof. Cigliola)

Esercizio 1. Calcolare:

(i) $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \pi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$;

(ii) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & \frac{\sqrt{3}}{3} & \pi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$;

(iii) $\left[\begin{pmatrix} -1 \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}^2 - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}^T$.

Esercizio 2. Siano

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Calcolare:

(i) $2A - B$;

(ii) $3A + 2B - 4C$;

(iii) $-2A + B + 2C - 2B$;

(iv) $3B + 2(2A - C) - (A + B + 2C)$;

(v) $A^T + B^T - 2C^T$

Esercizio 3. Siano

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Calcolare quando possibile

(i) AC;

(ii) $(BC)A$;

(iii) $B + (CA)$;

(iv) BA;

(v) BA^T;

(vi) $3A^T + BC$.

Esercizio 4. Una matrice quadrata A si dice idempotente se $A^2 = A$. Dimostrare che se $AB = A$ e $BA = B$ allora A, B, AB e BA sono idempotenti.

Esercizio 5. Costruire almeno due combinazioni lineari dei seguenti insiemi di vettori:

(i) $v_1 = (0,0)$, $v_2 = (1,-1)$ in $\mathbb{R}^2$.

(ii) $v_1 = (1,1)$, $v_2 = (-1,2)$ in $\mathbb{R}^2$.

(iii) $v_1 = (-1,1)$, $v_2 = (1,2)$, $v_3 = (0,-1)$ in $\mathbb{R}^2$.

(iv) $v_1 = (1,0,1)$, $v_2 = (1,1,1)$, $v_3 = (2,1,2)$ in $\mathbb{R}^3$.

(v) $v_1 = (1,0,1)$, $v_2 = (1,1,-1)$, $v_3(2,4,0)$, $v_4 = (1,0,7)$ in $\mathbb{R}^3$.

Esercizio 6. Scrivere, se possibile, il vettore $w = (-1,2)$ come combinazione lineare dei vettori $v_1 = (1,1)$ e $v_2 = (1,2)$.

Esercizio 7. Scrivere, se possibile, il vettore $w = (-1,2)$ come combinazione lineare dei vettori $v_1 = (1,1)$, $v_2 = (1,2)$ e $v_3 = (2,-1)$.

Esercizio 8. Scrivere, se possibile, il vettore $w = (-1,1)$ come combinazione lineare dei vettori $v_1 = (-1,1)$ e $v_2 = (-2,1)$.

Esercizio 9. Scrivere, se possibile, il vettore $w = (1,\pi)$ come combinazione lineare dei vettori $v_1 = (-1,1)$ e $v_2 = (1,-1)$.

Esercizio 10. Scrivere, se possibile, il vettore $w = (1,2,-1)$ come combinazione lineare dei vettori $v_1 = (1,0,0)$, $v_2 = (1,1,0)$ e $v_3 = (1,1,1)$.

Esercizio 11. Scrivere, se possibile, il vettore $w = (1,2,-1)$ come combinazione lineare dei vettori $v_1 = (1,-1,0)$ e $v_2 = (1,1,1)$.

Esercizio 12. Trovare una formula per il calcolo delle seguenti potenze di matrici a coefficienti reali e la si dimostri per induzione:

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n \qquad \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & b \end{pmatrix}^n.$$

Esercizio 13. Data la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, provare che $A^2 = 2A - I_2$ e calcolare A^{100}.

Esercizio 14. Trovare le matrici $X = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ tali che $X^2 = I_2$. Provare inoltre che l'unica matrice per cui si ha $X^3 = I_2$ è la matrice $X = I_2$.

Esercizio 15. Sia data la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$. Trovare le matrici $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ tali che $AX = 0$.

Esercizio 16. Trovare tutte le matrici a coefficienti reali che commutano sotto il prodotto con la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Ripetere lo stesso esercizio con la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Esercizio 17. Sia A una matrice quadrata a coefficienti reali. Si supponga che A abbia una riga od una colonna le cui entrate sono tutte nulle. Provare che A non può essere invertibile.

Esercizio 18. Sia $GL_n(\mathbb{R})$ l'insieme delle matrici invertibili di $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Provare che $GL_n(\mathbb{R})$ è un gruppo rispetto al prodotto riga per colonna. Provare inoltre che esso non è in generale un gruppo abeliano.

[Suggerimento: Affinché $GL_n(\mathbb{R})$ sia un gruppo, bisogna far vedere per prima cosa che la matrice prodotto di due matrici invertibili è essa stessa una matrice invertibile, altrimenti il prodotto riga per colonna non è un'operazione su $GL_n(\mathbb{R})$. Il resto è banale: l'associatività è ovvia, perché? Chi è l'elemento neutro? Chi è il simmetrico di un elemento di $GL_n(\mathbb{R})$?]

Esercizio 19. Siano A e B due matrici simmetriche di ordine n a coefficienti reali. Provare che AB è una matrice simmetrica se e solo se $AB = BA$.

Esercizio 20. Sia n un numero intero, $n \geqslant 1$.

(i) Sia $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ una matrice simmetrica. Provare che gli elementi di A posti simmetricamente rispetto alla diagonale principale sono uguali.

(ii) Sia $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ una matrice antisimmetrica. Provare che gli elementi di A posti simmetricamente rispetto alla diagonale principale sono opposti e che gli elementi della diagonale sono tutti nulli.

(iii) Si dimostri che per ogni $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, le matrici $A + {}^tA$, A^TA ed AA^T sono simmetriche e che la matrice $A - A^T$ è antisimmetrica.

(iv) Provare che l'unica matrice che è sia simmetrica che antisimmetrica è la matrice nulla.

(v) Provare che ogni elemento di $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ può essere scritto in maniera unica come somma di una matrice simmetrica e di una matrice antisimmetrica.

(vi) Decomporre le matrici $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ come somma di una matrice simmetrica e di una antisimmetrica.