Università degli Studi di Roma La Sapienza
Corso di laurea in Ingegneria Energetica
Geometria A.A. 2014-2015
Foglio di esercizi n.10 (prof. Cigliola)

Esercizio 1. Determinare per quali valori di k i seguenti vettori v e w sono ortogonali:

(i) $v = (2, 1, 0, -k)$ e $w = (-2, 0, \pi, -k)$ in $\mathbb{R}^4$;

(ii) $v = (1, -1, k)$ e $w = (k, 1, k)$ in $\mathbb{R}^3$;

(iii) $v = (k^2, -1, -5)$ e $w = (2, 3, k)$ in $\mathbb{R}^3$.

Esercizio 2. Determinare l'angolo (anche a meno del segno) compreso tra i seguenti vettori :

(i) $v = (2, 1)$ e $w = (-1, 2)$ in $\mathbb{R}^2$;

(ii) $v = (0, 1, 1)$ e $w = (1, 2, 1)$ in $\mathbb{R}^3$;

(iii) $v = (5, 0, \sqrt{10}, -1)$ e $w = (-1, 0, 0, 1)$ in $\mathbb{R}^4$;

(iv) $v = (-1, 0, -1)$ e $w = (1, 2, 0)$ in $\mathbb{R}^3$.

Esercizio 3. Nel sottospazio $U = \mathcal{L}((1, -1, 1), (0, 1, 2), (-1, 2, 3))$ di $\mathbb{R}^3$ trovare due vettori che formano un angolo di $\frac{3}{4}\pi$ radianti.

Esercizio 4. Sia dato in $\mathbb{R}^2$ il vettore $v = (1, 3)$. Determinare il versore ortogonale a v formante col vettore $u = (1, -1)$ un angolo ottuso. Determinare poi tutti i vettori paralleli a v di modulo 3.

Esercizio 5. Verificare che i vettori di $\mathbb{R}^3$ $v_1 = (1, -2, 1)$ e $w = (1, 1, 1)$ sono ortogonali e determinare una base ortogonale di $\mathbb{R}^3$ che li contiene.

Esercizio 6. Determinare una base ortonormale $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^3$ che contiene il versore del vettore $v = (1, 2, 1)$. Scrivere le matrici di passaggio dalla base canonica alla base $\mathcal{B}$ e dalla base $\mathcal{B}$ alla base canonica.

Esercizio 7. Sia dato in $\mathbb{R}^3$ il piano vettoriale $W = \mathcal{L}(v_1, v_2)$, dove $v_1 = (1, 1, -1)$ e $v_2 = (1, 1, 2)$. Verificare che l'applicazione $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ che ad ogni vettore di $\mathbb{R}^3$ associa la sua proiezione ortogonale su W è un endomorfismo. Trovare $\operatorname{Ker} F$ e $\operatorname{Im} F$. Stabilire inoltre se F è diagonalizzabile.

Esercizio 8. Si considerino i vettori in $\mathbb{R}^3$

$$v_1 = (1, 2, -1) \qquad v_2 = (1, 0, 1) \qquad v_3 = (1, 2, 0)$$

(i) Calcolare $\|v_1\|$, $\|v_2\|$ e $\|v_3\|$.

(ii) Calcolare gli angoli individuati dai tre vettori.

(iii) Determinare tutti i vettori contemporaneamente ortogonali a v_1 e v_2 e provare che formano un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.

(iv) Calcolare tutti i vettori ortogonali a $w = \frac{1000}{873}v_3$.

(v) Determinare la proiezione ortogonale di v_1 e v_3 sul vettore v_2

Esercizio 9. Determinare in $\mathbb{R}^3$ il vettore proiezione ortogonale del vettore $v = (0,1,2)$ sul sottospazio W generato dai vettori $v_1 = (1,1,0)$ e $v_2 = (0,0,1)$.

Esercizio 10. Determinare una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ a partire dalla base

$$\mathcal{B} = \{\ (1,0,1), (0,1,1), (0,1,-1)\ \}$$

Esercizio 11. Determinare una base ortonormale del complemento ortogonale $U^\perp$ del sottospazio

$$U = \left\{\ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \ \middle|\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 2x_2 - x_4 = x_4 = 0\ \right\}$$

Esercizio 12. Trovare una base ortogonale ed una base ortonormale del sottospazio di $\mathbb{R}^5$ definito dalle equazioni

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_3 - x_4 - x_5 = 0 \\ 2x_1 - x_3 = 0 \end{cases}$$

Esercizio 13. Dimostrare l'identità del parallelogramma. Determinare un punto D in $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ tale che il quadrilatero $ABCD$ sia un parallelogramma, dove $A(-1,-1,2)$, $B(3,2,2)$ e $C(2,-2,2)$. Verificare l'identità del parallelogramma per $ABCD$.

Esercizio 14. Siano v e w due vettori di $\mathbb{R}^n$. Dimostrare che vale la *prima formula di polarizzazione*:

$$v \cdot w = \frac{1}{2}\left(\|v + w\|^2 - \|v\|^2 - \|w\|^2\right)$$

Esercizio 15. Siano v e w due vettori di $\mathbb{R}^n$. Dimostrare che vale la *seconda formula di polarizzazione*:

$$v \cdot w = \frac{1}{4}\left(\|v + w\|^2 - \|v - w\|^2\right)$$

Esercizio 16. Applicare il procedimento ortogonale di Gram-Schmidt ai vettori

$$v_1 = (1,2,-1) \qquad v_2 = (1,0,1), \qquad v_3 = (0,-1,2)$$

per determinare una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$.

Esercizio 17. Siano U e W sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$. Provare che

(i) $(W^\perp)^\perp = W$

(ii) $(U+W)^\perp = U^\perp \cap W^\perp$

(iii) $(U \cap W)^\perp = U^\perp + W^\perp$

(iv) $U \subseteq W \ \Rightarrow\ W^\perp \subseteq U^\perp$

Esercizio 18. Sia W il sottospazio di $\mathbb{R}^3$ generato dai vettori $v_1 = (-1,0,1)$ e $v_2 = (2,1,0)$. Decomporre il vettore $w = (1,1,-1)$ secondo i sottospazi W e $W^\perp$.

Esercizio 19. Determinare una base ortonormale del sottospazio di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori

$$v_1 = (1,1,1,0) \qquad v_2 = (-1,1,-1,0) \qquad v_3 = (1,0,1,0)$$

Esercizio 20. Siano $v_1, v_2, \ldots, v_m$ versori a due a due ortogonali di $\mathbb{R}^n$. Dimostrare che $m \leqslant n$ e che $v_1, v_2, \ldots, v_m$ sono linearmente indipendenti.

Esercizio 21. Calcolare una base ortonormale del sottospazio di $\mathbb{R}^4$

$$U = \mathcal{L}((0,-2,4,1),\ (25,8,29,3000),\ (0,2,1,1)\ (-1,2,1/2,3),\ (0,1,1,1))$$

Esercizio 22. Interpretare geometricamente il procedimento di Gram-Schmidt in $\mathbb{R}^3$.

Esercizio 23. Determinare una base ortonormale di $\mathbb{R}^4$ a partire dai vettori

$$v_1 = (1,2,0,0)\ \ v_2 = (0,1,-1,0)\ v_3 = (0,0,1,-1)\ \ v_4 = (0,0,0,5)$$

Esercizio 24. Determinare una base ortonormale del sottospazio W di $\mathbb{R}^3$ definito dall'equazione $x_1 - x_2 - x_3 = 0$. Completare la base ortonormale trovata per W ad una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$. Determinare la proiezione ortogonale del vettore $u = (1,2,-1)$ su W.

Esercizio 25. Sia dato in $\mathbb{R}^3$ il sottospazio

$$W = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x - 2y = x - z \right\}$$

(i) Determinare una base di W e di $W^\perp$.

(ii) Determinare una base ortogonale di W e di $W^\perp$.

(iii) Determinare una base ortonormale di W e di $W^\perp$.

Esercizio 26. Sia dato in $\mathbb{R}^4$ il sottospazio

$$W = \left\{ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \,\middle|\, x + z = 2y - t = 0 \right\}$$

(i) Determinare una base di W e di $W^\perp$.

(ii) Determinare una base ortogonale di W e di $W^\perp$.

(iii) Determinare una base ortonormale di W e di $W^\perp$.

Esercizio 27. Sia dato in $\mathbb{R}^5$ il sottospazio

$$W = \left\{ (x, y, z, u, v) \in \mathbb{R}^5 \,\middle|\, x + z - t = y + z + u = 0 \right\}$$

(i) Determinare una base di W e di $W^\perp$.

(ii) Determinare una base ortogonale di W e di $W^\perp$.

(iii) Determinare una base ortonormale di W e di $W^\perp$.

Esercizio 28. Determinare una base ortonormale del sottospazio W di $\mathbb{R}^4$ definito dall'equazione $x_1 + x_2 + x_3 = 0$. Completare la base ortonormale trovata per W ad una base ortonormale di $\mathbb{R}^4$. Determinare la proiezione ortogonale del vettore $u = (1, 2, 0, 1)$ su W.

Esercizio 29. Siano dati in $\mathbb{R}^4$ i vettori

$$u_1 = (1, 1, 1, 1) \qquad u_2 = (-3, 1, 1, 1) \qquad u_3 = (0, 1, 1, -2)$$

Verificare che u_1, u_2, u_3 sono a due a due ortogonali. Trovare poi un vettore $u_4 \in \mathbb{R}^4$ di norma $\sqrt{2}$, formante un angolo acuto con $e_2 = (0, 1, 0, 0)$ e tale che $\{ u_1, u_2, u_3, u_4 \}$ sia una base ortogonale di $\mathbb{R}^4$.