Esercizi su integrali tripli

a cura di Antonio Cigliola

Esercizi proposti

Esercizio 1. Sia H la regione dello spazio definito dalle diseguaglianze $0 \leqslant x \leqslant 2y \leqslant 2$ e $0 \leqslant z \leqslant y+1$. Calcolare:

(i) $\displaystyle\iiint_H e^x(1+y)z \; dx\,dy\,dz;$ $\quad [\frac{17e^2-31}{16}]$

(ii) $\displaystyle\iiint_H xyz \; dx\,dy\,dz;$ $\quad [49/60]$

(iii) $\displaystyle\iiint_H dx\,dy\,dz;$ $\quad [5/3]$

(iv) $\displaystyle\iiint_H (x+y) \; dx\,dy\,dz.$ $\quad [7/3]$

Esercizio 2. Sia K la regione dello spazio delimitata dalla superficie cilindrica di raggio 1 coassiale con l'asse z, dal piano xy e dal piano di equazione $x + \frac{y}{2} + z = 3$. Calcolare:

(i) $\displaystyle\iiint_K \sqrt{x^2+y^2} \; dx\,dy\,dz;$ $\quad [2\pi]$

(ii) $\displaystyle\iiint_K dx\,dy\,dz;$ $\quad [3\pi]$

(iii) $\displaystyle\iiint_K \frac{xyz}{\sqrt{x^2+y^2}} \; dx\,dy\,dz.$ $\quad [\frac{\pi}{40}]$

Esercizio 3. Data la semisfera $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \leq 1,\ z \geq 0\}$, calcolare

$$\iiint_E z \; dxdydz.$$

$[\pi/4]$

Esercizio 4. Calcolare mediante l'uso di coordinate cilindriche

$$\iiint_D z \; dxdydz,$$

dove $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \geq \frac{x^2+y^2}{3}, x^2+y^2+z^2 \leq 4\}$. $\quad [13\pi/4]$

Esercizio 5. Data la semisfera $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \leq 1,\ z \geq 0\}$, calcolare

$$\iiint_E (x^2+y^2) \; dxdydz.$$

$[4\pi/15]$

Esercizio 6. Calcolare
$$\iiint_D \frac{dxdydz}{1+x^2+y^2+z^2},$$
dove $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \geq 0,\ y \geq 0, z \geq 0,\ x^2+y^2+z^2 \leq 1\}$.

$[\pi(4-\pi)/8]$

Esercizio 7. Calcolare
$$\iiint_\Omega (x^2+y^2+z^2-1)dxdydz,$$
dove $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 < 2,\ x^2+y^2 < z\}$.

$[\frac{\pi(16\sqrt{2}-19)}{60}]$

Esercizio 8. Calcolare
$$\iiint_\Omega \frac{x^2}{x^2+y^2+z^2}dxdydz,$$
dove $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 1 < x^2+y^2+z^2 < 2,\ x^2-y^2+z^2 < 0,\ y > 0\}$.

$[\frac{5(4-\sqrt{2})(\pi-2)}{72}]$

Esercizio 9. Si calcoli
$$\iiint_D x^2\ dxdydz,$$
dove $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \leq 1\}$.

$[4\pi/15]$

Esercizio 10. Calcolare
$$\iiint_T \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\ dxdydz,$$
dove
$$T = \left\{\ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\ \middle|\ x^2+y^2+z^2 \leq 1,\ x^2+y^2 \leq z^2,\ z \geq 0\ \right\}.$$

$[\frac{\pi^2}{4}]$

Esercizio 11. Calcolare
$$\iiint_D xyz^2\ dxdydz,$$
dove $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq x \leq 1,\ -x \leq z \leq x,\ x+z \leq y \leq 4\}$. $[104/105]$

Esercizio 12. Calcolare
$$\iiint_D 4zx\ dxdydz,$$
dove
$$D = \left\{\ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\ \middle|\ 0 \leq y \leq 3,\ \ 0 \leq z \leq \sqrt{1-\frac{y^2}{9}},\ \ 0 \leq x \leq 2\sqrt{1-\frac{y^2}{9}-z^2}\ \right\}.$$

$[16/5]$

Esercizio 13. Calcolare il baricentro della regione E interna al cilindro $x^2+y^2=2$ e compresa tra il paraboloide $z = x^2+y^2-1$ ed il piano $z = 9-x-y$.