Esercizi su integrali doppi

a cura di Antonio Cigliola

Esercizio 1. Calcolare l'area della regione racchiusa tra i grafici delle funzioni f e g nell'intervallo indicato:

(i) $f(x) = \sin x$ e $g(x) = \cos x$ con $x \in [\frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi]$; $[\sqrt{2}]$

(ii) $f(x) = x^n$ e $g(x) = x^{n+1}$ con $x \in [0, 1]$ ed $n \geqslant 1$;

(iii) $f(y) = y^2$ e $g(y) = \sqrt[3]{y}$ con $y \in [0, 1]$. $[\frac{5}{12}]$

Esercizio 2. Determinare l'area della regione di piano racchiusa tra i grafici delle seguenti funzioni:

(i) $xy = 2$ e $3 - y - x = 0$; $[\frac{3}{2} - \log 4]$

(ii) $y - x^3 = 0$ e $x - y^3 = 0$; $[1]$

(iii) $y - 2x - 1 = 0$, $y + x - 4 = 0$ e $4y - x - 2 = 0$;

(iv) $y = 2$, $y = 2^x$ e $y = 2^{-x-3}$. $[10 + \frac{2\sqrt{2}-16}{\log 16}]$

Esercizio 3. Sia dato l'insieme

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x \geqslant 0,\ y \leqslant 0,\ x^2 + y^2 \leqslant 4 \right\}.$$

(i) Scrivere l'insieme D come dominio normale in x e come normale in y.

(ii) Descrivere l'insieme D in coordinate polari e rappresentarlo graficamente sia nel piano cartesiano che nel piano polare.

(iii) Determinare il baricentro di D.

(iv) Calcolare $\displaystyle\iint_D x e^y \, dx\, dy$. $[1 + \frac{3}{e^2}]$

(v) Verificare che $\displaystyle\iint_D e^{-x^2-y^2} \, dx\, dy = \frac{\pi}{4}\left(1 - \frac{1}{e^4}\right)$.

(vi) Calcolare $\displaystyle\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\; e^{\sqrt{x^2+y^2}} \, dx\, dy$. $[\pi(e^2 - 1)]$

(vii) Verificare che $\displaystyle\iint_D \frac{x \sin y}{\sqrt{x^2+y^2}} \, dx\, dy = \sin 2 - 2$.

(viii) Calcolare $\displaystyle\iint_D \log\left(\sqrt{x^2+y^2} + 1\right) dx\, dy$. $[\frac{3}{4}\pi \log 3]$

Esercizio 4. Sia T il triangolo di vertici i punti $(0, 0)$, $(1, 1)$ e $(-1, 1)$. Calcolare i seguenti integrali:

(i) $\displaystyle\iint_T xy \; dx\, dy$. $[0]$

(ii) $\displaystyle\iint_T x^2 y \; dx\, dy$. $[\frac{2}{15}]$

(iii) $\displaystyle\iint_T \sin y \; dx\, dy.$ $[2(\sin 1 - \cos 1)]$

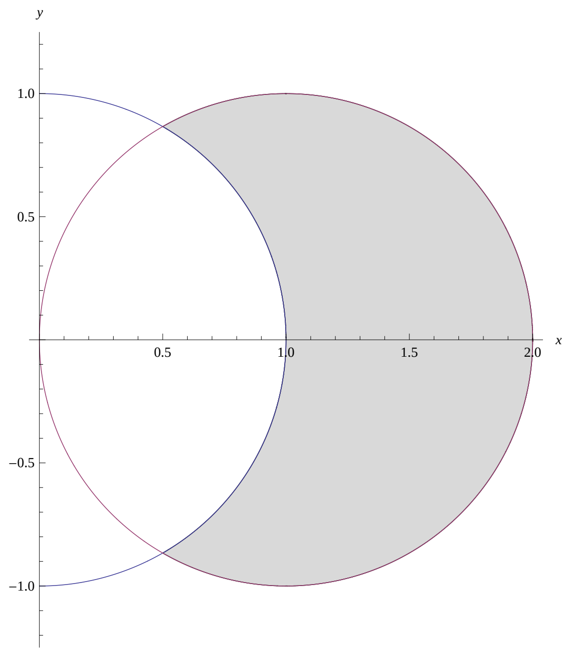
(iv) $\displaystyle\iint_T y\, e^x \; dx\, dy.$ $[2e^{-1}]$

(v) $\displaystyle\iint_T \frac{1+y}{1+x^2} \; dx\, dy.$ $[\pi - \log 2 - 1]$

Si calcolino inoltre area e baricentro di T.

Esercizio 5. Determinare il baricentro della regione E compresa nel primo quadrante tra le circonferenze di raggio 1 e centri $C_1(0,0)$ e $C_2(1,0)$.

Esercizio 6. In figura sono date le circonferenze di centro $(0,0)$ e $(1,0)$ entrambe di raggio 1.



Sia D la regione colorata in figura.

(i) Calcolare l'area di D. $[\mathcal{A} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{3}]$

(ii) Determinare il baricentro di D. $[x_G = \frac{1}{\mathcal{A}} \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{2\pi}{3},\; y_G = 0]$

(iii) Calcolare l'integrale $\displaystyle\iint_D \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \, dxdy.$ $[2\sqrt{3} - \frac{2}{3}\pi]$

(iv) Calcolare l'integrale $\displaystyle\iint_D (x^2+y^2+2) \; dxdy.$ $[\frac{3}{8}(5\sqrt{3} + 4\pi)]$

(v) Calcolare l'integrale $\displaystyle\iint_D \frac{xy\; e^{x^2+y^2}}{x^2+y^2} dxdy.$ $[0]$