Sapienza Università di Roma
Corso di laurea in Ingegneria Energetica
Geometria – A.A. 2015-2016
ESERCIZI DA CONSEGNARE
prof. Cigliola

Consegna per Martedì 6 Ottobre

Esercizio 1. Una matrice quadrata A si dice idempotente se $A^2 = A$. Dimostrare che se $AB = A$ e $BA = B$ allora le matrici A e B sono idempotenti.

Esercizio 2. Siano date le matrici $A \in \mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ e $B \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Dimostrare che $(AB)^T = B^T A^T$.

Esercizio 3. Siano date due matrici quadrate invertibili A e B. Dimostrare che $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Esercizio 4. Siano A e B due matrici simmetriche di ordine n a coefficienti reali. Provare che AB è una matrice simmetrica se e solo se $AB = BA$.

Esercizio 5. Si dimostri che per ogni $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, le matrici $A^T A$ e AA^T sono simmetriche.

Consegna per Venerdì 9 Ottobre

Esercizio 1. Dimostrare che valgono le seguenti eguaglianze:

(i) $$\det\begin{pmatrix} 1+x & 1+y & 1 \\ 1+x_1 & 1+y_1 & 1 \\ 1+x_2 & 1+y_2 & 1 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{pmatrix}$$

(ii) $$\det\begin{pmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ac \\ 1 & c & ab \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{pmatrix}$$

(iii) $$\det\begin{pmatrix} a & b & ab \\ b & c & bc \\ c & a & ac \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & ac & bc \\ 1 & ab & ac \\ 1 & bc & ab \end{pmatrix}$$

(iv) $$\det\begin{pmatrix} x_1+y_1 & x_2+y_2 & x_3+y_3 \\ y_1+z_1 & y_2+z_2 & y_3+z_3 \\ x_1+z_1 & x_2+z_2 & x_3+z_3 \end{pmatrix} = 2\det\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix}$$

Esercizio 2. Sia data la matrice quadrata A di orine n e sia $\lambda \in \mathbb{R}$. Si esprima $\det(\lambda A)$ in funzione di $\det A$.

Consegna per Martedì 13 Ottobre

Esercizio 1. Siano $l, m, n \in \mathbb{Z}$, con $l \neq 0$. Dimostrare che la matrice $A = \begin{pmatrix} l & m \\ n & \sqrt{2} \end{pmatrix}$ è invertibile e calcolare la sua inversa.

Esercizio 2. Siano K un campo ed $a_1, \ldots, a_n \in K$. Dimostrare che la matrice diagonale $\begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{pmatrix}$ è invertibile se e solo se $a_1 \cdots a_n \neq 0$. Provare inoltre che in tale ipotesi, la sua inversa è $\begin{pmatrix} a_1^{-1} & & \\ & \ddots & \\ & & a_n^{-1} \end{pmatrix}$.

Esercizio 3. Al variare di $h \in \mathbb{R}$, determinare il rango della seguente matrice:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & h & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & h+1 \\ 0 & -2 & h+1 & 0 \\ 0 & -h & -h & 0 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 4. Sia A una matrice antisimmetrica di ordine 357. Dimostrare che A non è invertibile.

Esercizio 5. Sia data la matrice quadrata $A = (a_{ij})$ di ordine 4 tale che

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad i+j=5 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Sia poi $B = A + I_4$. Calcolare il rango e il determinante di A e di B.

Consegna per Mercoledì 14 Ottobre

Esercizio 1. Risolvere il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} 7x_1 + 5x_4 = 0 \\ x_1 + 10x_2 + x_3 - 3x_4 = 10 \\ 10x_1 - 3x_2 + x_3 + 10x_4 = -3 \\ 12x_1 + 31x_2 + 24x_3 - 5x_4 = 31 \end{cases}$$

Consegna per Lunedì 19 Ottobre

Esercizio 1. Discutere e risolvere il seguente sistema lineare al variare di a e b:

$$\begin{cases} ax + y + bz = 1 \\ x + y + az = 1 \\ x + ay - bz = 1 \end{cases}$$

Esercizio 2. Siano $v_1, v_2, \ldots, v_n$ dei vettori di $\mathbb{R}^n$. Dimostrare che essi sono linearmente indipendenti se e solo se la matrice che li ha per righe (o colonne) ha determinante non nullo.

Esercizio 3. Dimostrare che un sottoinsieme finito di vettori di $\mathbb{R}^n$ ha al più n vettori linearmente indipendenti.

Consegna per Martedì 27 Ottobre

Esercizio 1. Si consideri il sottoinsieme U di $\mathbb{R}[x]$ definito come

$$W = \{ f(x) \in \mathbb{R}[x] \mid f(-1) = f(1) = 0,\ \deg f(x) \leqslant 4 \} \cup \{ 0 \} .$$

(i) Provare che W è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}_{\leqslant 4}[x]$.

(ii) Determinare una base e la dimensione di W.

(iii) Si costruisca una nuova base di W e si trovino le matrici di passaggio tra le due basi di W usate.

(iv) Completare una base di W ad una base dello spazio vettoriale

$$U = \{ f(x) \in \mathbb{R}[x] \mid f(-1) = 0,\ \deg f(x) \leqslant 4 \} \cup \{ 0 \} .$$

Consegna per Lunedì 2 Novembre

Esercizio 1. Sia n un intero positivo. Determinare una base dei sottospazi $Sym_n(\mathbb{R})$, $ASym_n(\mathbb{R})$ e $Diag_n(\mathbb{R})$. Quanto valgono le loro dimensioni?

Esercizio 2. Siano dati in $\mathbb{R}^4$ il sottospazio E generato da $u_1 = (1,1,2,0)$ ed $u_2 = (0,1,0,1)$, ed il sottospazio F_k definito dalle soluzioni del sistema $\begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 + kx_4 = 0 \end{cases}$, con k parametro reale. Per quali valori di k la somma $E + F_k$ è diretta?

Esercizio 3. Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione 5 e siano E ed F suoi sottospazi di dimensione 3 e 4 rispettivamente. Fornire una stima per le dimensioni di $E + F$ ed $E \cap F$.

Consegna per Giovedì 5 Novembre

Esercizio 1. Siano r ed s due rette sghembe e sia P un punto dello spazio tale che $P \notin r \cup s$. Provare che esiste ed è unica la retta r' passante per P complanare con r e complanare con s.

Consegna per Lunedì 9 Novembre

Esercizio 1. Sia data l'applicazione $F : \mathbb{R}_{\leqslant 2}[x] \longrightarrow M_2(\mathbb{R})$ tale che

$$F(f(x)) = \begin{pmatrix} f(1) & f(0) \\ f(-1) & f(0) \end{pmatrix}$$

(i) Provare che F è lineare.

(ii) Scrivere esplicitamente l'immagine di un generico polinomio $f(x) = ax^2 + bx + c$.

(iii) Trovare l'immagine diretta del sottospazio $U = \mathscr{L}(1 + x,\ x^2 - 1)$.

(iv) Provare che la controimmagine della matrice identica I_2 sotto F è vuota.

(v) Trovare una base e la dimensione di $\operatorname{Im} F$ e $\operatorname{Ker} F$.

Esercizio 2. Dimostrare che l'insieme S delle serie numeriche convergenti è uno spazio vettoriale reale rispetto alle operazioni di somma e di moltiplicazione con scalare reale definite puntualmente. Provare inoltre che il sottoinsieme S_0 delle serie convergenti a 0 è un sottospazio vettoriale di S.

Esercizio 3. Siano V uno spazio vettoriale. Siano U e W due sottospazi di V tali che $U \oplus W = V$. Si definisca l'applicazione $F : V \to V$ tale che $F(v) = u$, dove u è quell'unico vettore di U per cui si ha $v = u + w$, con $w \in W$. Provare che $\operatorname{Ker} F \oplus \operatorname{Im} F = V$.

Consegna per Mercoledì 11 Novembre

Esercizio 1. Siano U, V e W spazi vettoriali. Siano date le applicazioni lineari $F : U \to V$ e $G : V \to W$. Dimostrare che anche l'applicazione $G \circ F$ è un'applicazione lineare da U in W.

Esercizio 2. Costruire, se esiste, un'applicazione lineare $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tale che $\operatorname{Ker} F = \mathscr{L}((1,-1,0,0),(1,0,-1,0))$, $\operatorname{Im} F \subseteq \mathscr{L}((1,1,1,1),(1,-1,0,1),(0,1,0,1))$. È unica tale applicazione?

Consegna per Lunedì 16 Novembre

Esercizio 1. Siano date la matrice $A \in \mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ e le matrici invertibili $B \in \mathscr{M}_m(\mathbb{R})$ e $C \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Dimostrare che

$$\operatorname{rk} A = \operatorname{rk} BA = \operatorname{rk} AC.$$

Esercizio 2. Dimostrare che il polinomio caratteristico di un endomorfismo non dipende dalla matrice associata scelta per calcolarlo.

Consegna per Giovedì 19 Novembre

Esercizio 1. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n. Dimostrare che se un endomorfismo di V ha n autovalori distinti allora è diagonalizzabile.

Esercizio 2. Stabilire per quali valori di k esiste una base di $\mathbb{R}^4$ costituita da autovettori della matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & k & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & -k & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Determinare una tale base nel caso $k = 1$.

Esercizio 3. Sia dato l'endomorfismo diagonalizzabile $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ avente base diagonalizzante

$$\mathscr{B} = \{v_1 = (1,2,0),\ v_2 = (0,1,1),\ v_3 = (0,1,-1)\}.$$

Si sa che 3 è autovalore di f e che $f(v_1) = f(v_2)$.

(i) Stabilire se f è iniettiva.

(ii) Stabilire se f è surgettiva.

(iii) Determinare una base di $\mathrm{Im}(f)$ ed una di $\mathrm{Ker}(f)$.

(iv) Calcolare esplicitamente $f(x,y,z)$ per ogni $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

Consegna per Venerdì 20 Novembre

Esercizio 1. Sia b una forma bilineare su uno spazio vettoriale V. Dimostrare che b è antisimmetrica se e solo se per ogni $v \in V$ si ha che $b(v,v) = 0$.

Esercizio 2. Si consideri la seguente applicazione $b : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tale che

$$b((x,y,z),\ (x',y',z')) = \begin{vmatrix} y & z \\ y' & z' \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x & z \\ x' & z' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & y \\ x' & y' \end{vmatrix}.$$

(i) Provare che b è una forma bilineare antisimmetrica su $\mathbb{R}^3$.

(ii) Calcolare le matrici associate a b rispetto alla base canonica e alla base

$$\{(1,-1,0),\ (-1,2,2),\ (0,1,-1)\}$$

Verificare che sono entrambe antisimmetriche.

Consegna per Lunedì 23 Novembre

Esercizio 1. Provare che esiste ed è unico l'endomorfismo F di $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ tale che:

- la controimmagine della matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ è la matrice identica;
- la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ è autovettore associato all'autovalore -1;
- la restrizione di F al sottospazio delle matrici antisimmetriche si comporta come l'applicazione identica su tale sottospazio;
- la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ è nel nucleo di F.

Dire poi se F è invertibile o diagonalizzabile.

Esercizio 2. Una forma bilineare b di $\mathbb{R}^3$ ha come matrice associata rispetto alla base

$$\{(1,0,1),(1,-1,1),(1,-1,0)\}$$

la matrice $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -4 & -1 \end{pmatrix}$.

(i) Calcolare $b((1,-1,1),(2,7,-2))$ e $b((1,1,1),(1,1,1))$.

(ii) Calcolare $b((x,y,z),(x',y',z'))$, per due generici vettori (x,y,z) e (x',y',z') di $\mathbb{R}^3$.

Consegna per Martedì 24 Novembre

Esercizio 1. Si definisce traccia di una matrice A, la quantità $\mathrm{tr}(A)$ definita come somma degli elementi diagonali di A. Provare che l'applicazione $b : \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \times \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ tale che $b(A;B) = \mathrm{tr}(AB^T - BA^T)$ è una forma bilineare.

Esercizio 2. Si consideri al variare di k la forma bilineare su $\mathbb{R}^4$ definita da

$$b(\mathbf{x},\mathbf{y}) = x_1y_1 + x_4y_4 + x_3y_1 + x_1y_3 + kx_4y_2 + kx_2y_4.$$

(i) Determinare il rango di b al variare di k.

(ii) Diagonalizzare b al variare di k.

(iii) Determinare al variare di k un sottospazio massimale che non contiene vettori isotropi.

Consegna per Giovedì 25 Novembre

Esercizio 1. Dati due vettori v e w, si dimostri che

$$\| v + w \|^2 + \| v - w \|^2 = 2 \| v \|^2 + 2 \| w \|^2 .$$

Tale identità è detta *identità del parallelogramma*. Perché?

Esercizio 2. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione $n \geqslant 1$. Sia $F : V \to V$ un endomorfismo non nullo di V tale che

$$F^3 + F = 0.$$

(i) Provare che F non è automorfismo.

(ii) Provare che $V = \mathrm{Ker}\, F \oplus \mathrm{Im}\, F$.

(iii) Provare che l'unico autovalore di F è quello nullo.

(iv) Dedurre che F non è diagonalizzabile.

Consegna per Lunedì 30 Novembre

Esercizio 1. Sia dato in $\mathbb{R}^3$ il piano vettoriale $W = \mathscr{L}(v_1, v_2)$, dove $v_1 = (1,1,-1)$ e $v_2 = (1,1,2)$. Verificare che l'applicazione $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ che ad ogni vettore di $\mathbb{R}^3$ associa la sua proiezione ortogonale su W è un endomorfismo. Trovare $\mathrm{Ker}\, F$ e $\mathrm{Im}\, F$. Stabilire inoltre se F è diagonalizzabile.

Esercizio 2. Determinare una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ a partire dalla base

$$\mathscr{B} = \{ (1,0,1), (0,1,1), (0,1,-1) \}$$

Esercizio 3. Siano U e W sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$. Provare che

(i) $(W^\perp)^\perp = W$

(ii) $(U + W)^\perp = U^\perp \cap W^\perp$

(iii) $(U \cap W)^\perp = U^\perp + W^\perp$

(iv) $U \subseteq W \;\Rightarrow\; W^\perp \subseteq U^\perp$

Consegna per Venerdì 4 Dicembre

Esercizio 1. Siano dati tre vettori linearmente indipendenti u, v, w di $\mathbb{R}^3$. Provare che

$$\{u \wedge v,\ u \wedge w,\ v \wedge w\}$$

è una base di $\mathbb{R}^3$.

Consegna per Lunedì 7 Dicembre

Esercizio 1. Dimostrare che esiste un'unica sfera passante per quattro punti nello spazio se e solo se questi non sono complanari.

Esercizio 2. Sia $W \subset \mathbb{R}^n$ un sottospazio non banale. Sia $\Pi_W : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ la proiezione ortogonale su W. Dimostrare che Π_W è un endomorfismo simmetrico.

Esercizio 3. Sia $k \in \mathbb{R}$. È data una matrice quadrata A di ordine 4 a coefficienti reali il cui polinomio caratteristico è

$$p(x) = x^4 - (k+1)x^3 + kx^2 - x + 3k.$$

(i) Per quali valori di k il rango di A è massimo?.

(ii) Provare che per $k = 0$ la matrice A non è simmetrica.

(iii) Supponendo che per $k \neq 0, -1$ la matrice A sia simmetrica, determinare la segnatura di A al variare di k.

Consegna per Venerdì 11 Dicembre

Esercizio 1. Al variare di $k \in \mathbb{R}$, classificare la conica

$$\mathscr{C} :\ x^2 + ky^2 + 4xy + 2x + 2y - 1 = 0.$$

Si studino in tutti i dettagli le coniche che si ottengono per $k = 1, 4, 5$.

Consegna per Lunedì 14 Dicembre

Esercizio 1. Un edificio ha la forma di un cilindro a base ellittica sormontato da un paraboloide ellittico (orientato verso il basso) con la base coincidente con la base superiore del cilindro. Sapendo che il cilindro è alto 3m, che i semiassi dell'ellisse di base misurano 4m e 8m e che la struttura è alta complessivamente 10m, determinare l'equazione del profilo del cilindro e del paraboloide che delineano l'edificio.

Esercizio 2. Descrivere le intersezioni con i piani paralleli ai tre piani coordinati $(x = 0,\ y = 0,\ z = 0)$ e stabilire il tipo della quadrica:

$$\mathscr{Q} :\ 6x^2 + 12x + 6 - 9y^2 - 4(z-1)^2 = 36.$$

Consegna per Martedì 15 Dicembre

Esercizio 1. Siano r ed s due rette affini che si incontrano nel punto $P(x_P, y_P)$ in $\mathbb{A}^2$. Dette $\bar{r}$ e $\bar{s}$ le chiusure proiettive di r ed s, dimostrare che $\bar{r} \cap \bar{s} = [x_P, y_P, 1]$ in $\mathbb{P}^2$.

Esercizio 2. Al avariare di $h \in \mathbb{R}$, si considerino le rette affini $r: \ hx + (2-3h)y + 1 = 0$ e $s: \ x - hy = 0$. Calcolare l'intersezione tra le chiusure proiettive di r ed s in $\mathbb{P}^2$ ed interpretare geometricamente i risultati ottenuti.

Consegna per Lunedì 21 Dicembre

Esercizio 1. Sia data la curva $\mathscr{C}: \ y = p(x)$, dove $p(x)$ è un polinomio nella sola indeterminata x. Dimostrare che $\mathscr{C}$ è una curva algebrica liscia e provare che l'equazione della retta tangente in un suo punto generico (usando il gradiente) coincide con la retta tangente trovata con i metodi dell'Analisi Matematica. Quanti e quali sono i punti impropri di $\mathscr{C}$?

Esercizio 2. Si consideri la curva piana

$$\mathscr{C}: \ y(y-x)(y+2x) = 9x.$$

(i) Si trovi l'equazione della chiusura proiettiva $\overline{\mathscr{C}}$ di $\mathscr{C}$.

(ii) Si dimostri che $\mathscr{C}$ è una curva liscia e si dica se lo è anche $\overline{\mathscr{C}}$.

(iii) Trovare la tangente a $\mathscr{C}$ nel punto $P(2 + \frac{3}{\sqrt{2}}, -1)$ e nell'origine.

(iv) Determinare (se ne esistono) i punti di $\mathscr{C}$ a tangente orizzontale e le relative tangenti.

(v) Trovare i punti all'infinito e gli asintoti di $\mathscr{C}$.

Consegna per Martedì 22 Dicembre

Esercizio 1. Sia data una curva affine $\mathscr{C}$ e sia $P(x_P, y_P)$ un punto regolare di $\mathscr{C}$. Detta $\overline{\mathscr{C}}$ la chiusura proiettiva di $\mathscr{C}$, dimostrare che la parte affine della retta tangente a $\overline{\mathscr{C}}$ in $\overline{P} = [x_P, y_P, 1]$ coincide con la retta tangente a $\mathscr{C}$ in P.

Esercizio 2. Tracciare il grafico della curva

$$\mathscr{C}: \ (y-1)x(x+y) + y = 0.$$