Università degli Studi Roma Tre
Corso di laurea in Matematica
GE210-Geometria 2 – A.A. 2014-2015
Appello X

Esercizio 1. Si consideri la proiettività $F: \mathbb{P}^3(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ associata alla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & -6 & 2 & -2 \\ 3 & -8 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

la cui inversa è la matrice

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & -3 & \frac{1}{2} & -1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{19}{4} & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(a) Verificare che F ammette tre punti fissi e li si determinino.

(b) Provare che F ammette più di una retta fissa. Provare inoltre che almeno una retta di $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ è fissata da F punto per punto.

(c) Dopo aver mostrato che F ammette piani fissi, determinarne uno esplicitamente e verificare il risultato trovato.

(d) Si consideri il sottoinsieme Σ di $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ definito dall'equazione:

$$\Sigma: \ X_0^2 - X_1 X_3 = 0.$$

Determinare l'equazione di $F(\Sigma)$.

Esercizio 2. Sia $k \in \mathbb{R}$. Si consideri la famiglia di coniche euclidee:

$$\mathscr{C}_k : \; 2x^2 - 2y^2 - 3xy - k = 0.$$

(a) Al variare di k, si classifichi la conica $\mathscr{C}_k$ e si dia una sua forma canonica euclidea.

(b) Dopo aver verificato che c'è solo un valore di k per cui $\mathscr{C}_k$ è riducibile, provare che tale conica si spezza nel prodotto di due rette r ed s ortogonali tra loro.

(c) Provare che r ed s sono asintoti per tutte le altre coniche della famiglia.

(d) Provare che per $k = 5$ e $k = -5$ si ottengono due coniche isometricamente equivalenti.

Esercizio 3. Determinare l'equazione del piano passante per il punto $P(1,0,0)$, perpendicolare al piano $\alpha: \ x+2z=0$ e distante 1 dalla retta $r: \begin{cases} x = z+2 \\ y = 1 \end{cases}$

Esercizio 4. Si consideri la forma quadratica Q definita su $\mathbb{R}^3$ da:

$$Q(x, y, z) = \alpha(x^2 + y^2 + 2xz) + z^2,$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

(a) Determinare l'espressione della forma bilineare B polare di Q.

(b) Per quali valori di α B è un prodotto scalare su $\mathbb{R}^3$? Per quali invece B è definita negativa?

(c) Si determini il cono isotropo di Q al variare di α.

(d) Sia $W = \mathcal{L}((1, 0, 0), (0, 0, 1))$. Al variare di α, si determini la dimensione del complemento ortogonale $W^\perp$ di W fatto rispetto a B.

(e) Posto $\alpha = \frac{1}{2}$, si determini una base di $\mathbb{R}^3$ ortonormale rispetto a B.

Esercizio 5. Nel piano affine sono dati i punti

$$O(0,0) \qquad\qquad P(2,2) \qquad\qquad Q(-1,0)$$

e i punti

$$O'(2,2) \qquad\qquad P'(4,4) \qquad\qquad Q'(2,1).$$

(a) Discutere l'esistenza e l'unicità di un'affinità che trasforma ordinatamente O, P e Q in O', P' e Q'.

(b) Determinare le equazioni di una affinità g che trasforma ordinatamente O, P e Q in O', P' e Q'.

(c) Stabilire se g è una isometria.

(d) Detta f_h l'affinità di equazioni:

$$f_h : \begin{cases} x' = y + h \\ y' = x - 3. \end{cases}$$

trovare i valori di h per cui si ha $f_h \circ g = g \circ f_h$.

(e) Al variare di h, calcolare l'area del triangolo di vertici $f_h(O)$, $f_h(P)$ e $f_h(Q)$.