

Sapienza Università di Roma – Facoltà ICI  
 Laurea in Ingegneria Energetica A.A. 2015/16  
 Prova di Geometria – 12 Settembre 2016  
 Programma A.A.14/15 – Prof. Cigliola

1)	2)	3)	4)	5)	6)
----	----	----	----	----	----

**N.B.** La parte sovrastante è riservata al docente.

Nome:	Mat.:
-------	-------

**Esercizio 1.** Si consideri l'endomorfismo  $F$  di  $\mathbb{R}^3$  tale che

$$F(v_1) = v_1 + v_2 - v_3 \quad F(v_2) = 2v_1 + v_3 \quad F(v_3) = 3v_1 + v_2,$$

dove  $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$  è la base canonica di  $\mathbb{R}^3$ .

- (a) Determinare una base dell'immagine e del nucleo di  $F$ .
- (b) Dire se  $F$  è diagonalizzabile.
- (c) Calcolare la controimmagine del vettore  $(1, 1, 1)$ .

**Esercizio 2.** Al variare di  $k \in \mathbb{R}$ , discutere e risolvere il sistema lineare: 
$$\begin{cases} kx + y = 1 \\ x + ky = 1 \\ kz = 1 \end{cases}$$

**Esercizio 3.** Considerare la curva algebrica  $\mathcal{C} : y^2 = x^3 - 3x^2 + 2x$ .

- (a) Determinare i punti impropri di  $\mathcal{C}$
- (b) Provare che  $\mathcal{C}$  è una curva liscia.
- (c) Dimostrare che  $\mathcal{C}$  non ammette asintoti.
- (d) Calcolare la retta tangente a  $\mathcal{C}$  in  $P(3, \sqrt{6})$ .
- (e) Tracciare il grafico di  $\mathcal{C}$ .

**Esercizio 4.** Si consideri la matrice simmetrica  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ . Determinare una matrice diagonale  $D$  ed una matrice ortogonale  $M$  tali che  $D = M^T A M$ .

**Esercizio 5.** Sono dati i sottospazi  $U = \mathcal{L}(x^2 - 2x, -x + 2)$  e  $W = \{ax^2 + bx + c \mid a + b - 2c = 0\}$  di  $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ .

- (a) Calcolare la dimensione ed una base di  $U \cap W$  e  $U + W$ .
- (b) Completare una base di  $U \cap W$  ad una base di  $U + W$ .
- (c) Dire se  $U \oplus W = \mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ .

**Esercizio 6.** Calcolare la distanza tra le rette  $r : \begin{cases} x = 1 \\ z = 2x \end{cases}$  e  $s : \begin{cases} y = -x \\ z = x. \end{cases}$