

Sapienza Università di Roma – Facoltà ICI
Laurea in Ingegneria Energetica A.A. 2014/15
Prova di Geometria – 11 Settembre 2015
Prof. Cigliola

1)	2)	3)	4)	5)	Fac	Tot
----	----	----	----	----	-----	-----

N.B. La parte sovrastante è riservata al docente.

Cognome:	Nome:
----------	-------

Esercizio 1.

Parte A. Per ciascuna delle seguenti questioni, si indichi la (sola) risposta corretta. Ogni risposta esatta vale 2 punti, ogni risposta errata -1 punto ed ogni risposta non data 0 punti.

A1) Sono date due matrici simmetriche A e B tali che $AB = BA$. Quale tra le seguenti affermazioni è falsa?

- (a) Risulta che $A^2 - B^2 = (A + B)(A - B)$.
- (b) Si ha che anche BA è una matrice simmetrica.
- (c) La matrice A^2B è una matrice simmetrica.
- (d) Nessuna delle precedenti affermazioni è vera.

A2) Si consideri la conica $\mathcal{C} : 2x^2 - xy - 7x - y^2 - 2y + 3 = 0$. Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

- (a) \mathcal{C} è una conica senza centro.
- (b) Il grafico di \mathcal{C} è vuoto.
- (c) \mathcal{C} è unione di due rette.
- (d) \mathcal{C} è una conica di tipo ellittico.

Parte B. Si stabilisca se le seguenti affermazioni sono vere o false. Ogni risposta esatta vale 0,5 punti, ogni risposta errata -0,25 punti ed ogni risposta non data 0 punti.

B1) Si consideri la curva algebrica

$$\mathcal{C} : x^5 - y^5 + x^3y - x^4 + x^2y = 0.$$

- V** **F** La curva \mathcal{C} ammette asintoti.
- V** **F** La curva \mathcal{C} è simmetrica rispetto all'origine.
- V** **F** La curva \mathcal{C} ammette nell'origine un punto triplo a tangenti distinte.
- V** **F** \mathcal{C} è una curva singolare.

B2) Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita. Siano poi $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ una base di V , $\{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ un sistema di generatori di V ed u un vettore di V .

- V** **F** I vettori w_1, w_2, w_3, w_4 sono linearmente indipendenti.
- V** **F** $\dim \mathcal{L}(v_1, w_2, w_3, w_4) = 4$.
- V** **F** $\dim \mathcal{L}(w_1, w_2, w_3, w_4, u) = 4$.
- V** **F** $\dim \mathcal{L}(w_1, w_2) \leq \dim \mathcal{L}(v_1, v_2, v_3, u)$.

B3) È dato nel piano il triangolo di vertici $A(2,0)$, $B(0,2)$ e $C(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$.

- V** **F** Il triangolo ABC è inscritto nella circonferenza $x^2 + y^2 - 4 = 0$.
- V** **F** L'area del triangolo ABC vale 2.
- V** **F** L'angolo $\hat{A}CB$ misura 45° .
- V** **F** Il triangolo ABC è isoscele.

Esercizio 2. Si considerino i sottospazi U e W di \mathbb{R}^5 così definiti:

$$U = \mathcal{L}((0, 0, 1, 1, 0), (0, 0, 0, 0, 0), (0, -1, 0, -1, 0), (1, 1, 0, 0, 1))$$

$$W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 \mid 2x_1 + x_2 - x_4 = x_1 - x_2 - x_5 = 0\}.$$

- (a) **(2pt)** Determinare una base ortogonale di U .
- (b) **(1pt)** Spiegare perché U e W sono isomorfi e costruire esplicitamente un isomorfismo tra essi.
- (c) **(2pt)** Determinare una base e la dimensione di $U \cap W$ e $U + W$.
- (d) **(1pt)** Costruire una base ortonormale di $U + W$.

Esercizio 3. È data l'applicazione $F : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ tale che

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2x_1 + x_2 - x_4, x_1 - x_2 + x_3 - x_4, x_1 + 2x_2 - x_3, 0).$$

- (a) **(2pt)** Determinare la dimensione ed una base di $\text{Ker } F$ e $\text{Im } F$.
- (b) **(2pt)** Stabilire se F è diagonalizzabile.
- (c) **(2pt)** Trovare, se esiste, un endomorfismo G di \mathbb{R}^4 tale che $\text{Ker } G = \text{Im } F$ e $\text{Im } G = \text{Ker } F$.

Esercizio 4. Si considerino nello spazio i tre piani:

$$\alpha : x - 2y - z + 2 = 0 \quad \beta : 2x - 4y - 2z - 1 = 0 \quad \gamma : y + z + 1 = 0.$$

- (a) **(1pt)** Determinare se esistono tutte le rette passanti per l'origine e parallele sia ad α che a β . Quante sono tali rette?
- (b) **(1pt)** Esistono rette perpendicolari sia ad α che a β ?
- (c) **(1pt)** Determinare se esistono tutte le rette passanti per l'origine e parallele sia ad α che a γ . Quante sono tali rette?
- (d) **(1pt)** Esistono rette perpendicolari sia ad α che a γ ?
- (e) **(1pt)** Determinare, se esiste, una retta che giace nel piano α e perpendicolare a γ .
- (f) **(1pt)** Trovare in γ due rette parallele.

Esercizio 5. Si consideri la conica euclidea

$$\mathcal{C} : xy - 1 = 0.$$

- (a) **(1pt)** Classificare \mathcal{C} e determinare una sua forma canonica \mathcal{C}_0 .
- (b) **(1pt)** Stabilire se \mathcal{C} è una conica a centro e in caso affermativo determinarne il centro.
- (c) **(1pt)** Stabilire se \mathcal{C} ammette asintoti ed in caso affermativo li si determinino.
- (d) **(1pt)** Trovare un'isometria f che trasforma \mathcal{C} in \mathcal{C}_0 e classificare tale isometria.
- (e) **(1pt)** Trovare, se esiste, una isometria che trasforma la conica \mathcal{C} nella conica

$$\mathcal{C}' : xy - 2 = 0.$$

- (f) **(1pt)** Trovare, se esiste, una isometria che trasforma la conica \mathcal{C} nella conica

$$\mathcal{C}' : xy + 1 = 0.$$

Esercizio 5. Alternativo. (10pt) Sia \mathcal{S} un'iperbole non degenera. Dimostrare che l'area del triangolo compreso tra i due asintoti di \mathcal{S} e la tangente in un punto di \mathcal{S} è costante (non dipende cioè dalla scelta del punto di \mathcal{S}).

Esercizio Facoltativo. (a) Illustrando i passaggi effettuati, si bilanci la seguente formula stechiometrica utilizzando esclusivamente i metodi dell'algebra lineare:



(b) Il seguente brano è estratto dalla fuga in *La minore* del secondo volume del *Clavicembalo ben temperato* di J.S. Bach.

Fuga XX, a 4.

Moderato deciso, con fermezza e gravità.

I. Exposition.

IIª Inversion.

Dopo aver individuato il tema principale, si indichino le *trasformazioni geometriche* che sono alla base delle tecniche contrappuntistiche utilizzate dall'autore nel brano.