Prova di Geometria
Università degli Studi di Roma La Sapienza
Ingegneria Energetica programma 2013-2014
Prof. CIGLIOLA - 4 Novembre 2014

1)	2)	3)	4)	5)	VOTO:

N.B. La parte sovrastante è riservata al docente.

Cognome	Nome

Esercizio 1. Per ciascuna delle seguenti questioni, si indichi la (sola) risposta corretta. Ogni risposta esatta vale 2 punti, ogni risposta errata -1 punto ed ogni risposta non data 0 punti.

I) L'inversa della matrice $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

(a) non esiste.

(b) è $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

(c) è $\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.

(d) è $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$.

II) Un sistema lineare di 3 equazioni in 7 incognite a coefficienti reali

(a) può essere solo indeterminato.

(b) può essere solo impossibile.

(c) non può avere una sola soluzione.

(d) ammette ∞^4 soluzioni.

III) La conica $\mathscr{C}: \ 2x^2 + 5xy - 2x + 2y^2 - y = 0$

(a) è un'ellisse.

(b) è una parabola.

(c) è degenere.

(d) è un'iperbole.

IV) Sia dato il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$ così definito:

$$W = \{(t+s,\ -t,\ s)\,|\,t, s \in \mathbb{R}\}$$

Rispetto al prodotto scalare standard, una base ortonormale di W

(a) è $\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(1,\ -1,\ 0),\ \frac{1}{\sqrt{6}}(1,\ 1,\ -2)\right\}$.

(b) non esiste.

(c) è $\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(1,\ -1,\ 0),\ \frac{1}{\sqrt{6}}(-1,\ -1,\ -2)\right\}$.

(d) è $\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(1,\ -1,\ 0),\ \sqrt{6}(1,\ 1,\ 2)\right\}$

V) In $\mathbb{R}^4$ siano dati i vettori

$v_1 = (1,0,1,0) \qquad v_2 = (0,1,-1,0) \qquad v_3 = (-2,0,1,0) \qquad v_4 = (1,0,2,0)$

Siano poi $U = \mathcal{L}(v_1,\ v_2)$ e $W = \mathcal{L}(v_3,\ v_4)$. Allora

(a) I vettori $v_1,\ v_2,\ v_3,\ v_4$ sono una base di $\mathbb{R}^4$.

(b) $\mathbb{R}^4 = U \oplus W$.

(c) $\dim U \cap W = 2$

(d) una base di $U \cap W$ è $\{(-2,0,-2,0)\}$.

Esercizio 2. Per quali valori del parametro reale k la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3-k & -k & 1 \\ k-1 & k+2 & -1 \\ k+1 & k & 3 \end{pmatrix}$$

è diagonalizzabile? In corrispondenza di tali valori si determini una base di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori per A.

Esercizio 3. (a) Si definisca il nucleo di un'applicazione lineare.

(b) Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita e sia $F : V \to V$ un'applicazione lineare. Provare che F è iniettiva se e solo se $\mathrm{Ker}(F) = \{\mathbf{0}_V\}$.

Si consideri l'applicazione lineare $F : M_{3,2}(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ tale che

$$F\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 + y_1 & x_2 - y_2 \\ 3x_3 & 2x_3 - x_1 \end{pmatrix}$$

(c) Determinare la matrice di F rispetto alle basi canoniche.

(d) Trovare una base e la dimensione per $\mathrm{Ker}\, F$ e per $\mathrm{Im}\, F$.

Esercizio 4. È dato il sistema lineare

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 - x_5 = -1 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 5x_4 + x_5 = 0 \\ -x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 1 \end{cases} \qquad (*)$$

(a) Stabilire se $\mathbf{x}_0 = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{10}, \frac{1}{10}, 0, 0\right)$ è una soluzione del sistema $(*)$.

(b) Stabilire se le quintuple $\mathbf{v}_1 = (0, 4, -6, 0, 10)$, $\mathbf{v}_2 = (1, 1, 0, 0, -1)$ e $\mathbf{v}_3 = (5, -11, 14, 5, 0)$ sono soluzioni del sistema lineare omogeneo associato a $(*)$.

(c) Risolvere il sistema $(*)$.

Esercizio 5. Nello spazio euclideo sono date le due rette:

$$r_k : \begin{cases} x = 1 + kt \\ y = 2 - kt \\ z = -1 + 2t \end{cases} \qquad \text{e} \qquad s : \begin{cases} x - 2z - 3 = 0 \\ y + 2z - 4 = 0 \end{cases}$$

(a) Per quali valori di k le rette r_k ed s sono parallele?

(b) Perquali valori di k le rette r_k ed s sono perpendicolari?

(c) Per $k = 1$, trovare, se esiste, un piano parallelo ad r e contenente s.

(d) Per $k = 4$, trovare, se esiste, un piano parallelo ad s e contenente r.