

Sapienza Università di Roma – Facoltà ICI
Laurea in Ingegneria Energetica A.A. 2015/16
Prova1 di Geometria – 30 Marzo 2016
Programma 2015/16 – Prof. Cigliola

1)	2)	3)	4)	5)	Tot.
----	----	----	----	----	------

N.B. La parte sovrastante è riservata al docente.

Nome:	Mat.:
-------	-------

“Di solito la mia risposta a qualsiasi problema è una scelta tra le seguenti: ha ragione lui; sposalo; fate un figlio; obbediscigli; fate un figlio; trasferisciti nella sua città; perdonalo; cerca di capirlo; e infine fate un figlio. Se lo ami lascia che faccia l'uomo e smetti di dargli ordini.”
(Costanza Miriano, da “Sposati e sii sottomessa”)

AVVERTENZE. Non è consentito utilizzare, pena l'annullamento della prova, note, libri di testo, appunti, cellulari, tablet, supporti cartacei o elettronici in genere. È consentito utilizzare soltanto la tabella delle superficie quadriche fornita dal docente. Le risposte del primo esercizio non vanno giustificate. Tutte le altre sì ed in maniera chiara e concisa.

Esercizio 1.

Parte A. Per ciascuna delle seguenti questioni, si indichi la (sola) risposta corretta. Ogni risposta esatta vale 2 punti, ogni risposta errata -1 punto ed ogni risposta non data 0 punti.

A1) Sia A la matrice quadrata di ordine 97 con elementi tutti uguali ad 1. Sia B la matrice di tipo 97×85 che ha gli elementi $b_{15, 63}$ e $b_{29, 17}$ uguali ad 1 e tutte le altre entrate nulle. Allora

- (a) AB ha rango 2.
- (b) A^{23} ha le colonne linearmente indipendenti.
- (c) $B^T A^T$ ha rango 1.
- (d) nessuna delle precedenti è vera.

A2) Sia data la conica $\mathcal{C} : 2x^2 - 3y^2 + 6xy - 2x + 2y - 1 = 0$.

- (a) \mathcal{C} è doppiamente degenere.
- (b) \mathcal{C} ha per asintoto la retta $3x - 2y + 1 = 0$.
- (c) \mathcal{C} può essere trasformata per mezzo di un'affinità nella conica di equazione $xy + 117 = 0$.
- (d) \mathcal{C} ha centro nel punto $(\frac{1}{3}, 0)$.

Parte B. Si stabilisca se le seguenti affermazioni sono vere o false. Ogni risposta esatta vale 0,5 punti, ogni risposta errata -0,25 punti ed ogni risposta non data 0 punti.

B1) Al variare del parametro reale k , sono dati in \mathbb{R}^4 i sottospazi

$$W = \mathcal{L}((1, k, 1, k), (0, -1, 0, 2k), (1, -1, 1, k^2), (0, 0, 0, 0))$$

e

$$U = \mathcal{L}((1, 1, -1, 0), (k, 0, 0, 2k), (-1, 2, 0, k))$$

- V** **F** Si ha che $\dim(U + W^\perp) \geq 5$, per $k = -110$.
- V** **F** Per $k = 0$ gli spazi W e U^\perp sono a somma diretta.
- V** **F** Lo spazio W ha equazione cartesiana $x_1 - x_3 = 0$, per $k = 0$.
- V** **F** Per $k = 1$ lo spazio $U \cap W^\perp$ ha dimensione 1.

B2) Sono dati nello spazio i punti $A = (0, 0, -k)$, $B = (1, 1, 0)$ e $C = (2, -1, 1 - k)$.

- V** **F** I punti A , B e C sono complanari per $k = \frac{7}{3}$.
- V** **F** I punti A , B e C non sono allineati per nessun valore di k .
- V** **F** La retta passante per A e B è perpendicolare al piano $\pi : x - 2y + z + \sqrt{3} = 0$ per $k = 2$.
- V** **F** Il valore minimo che assume l'area del triangolo ABC è $3\sqrt{\frac{3}{10}}$.

B3) Sia F un endomorfismo simmetrico di \mathbb{R}^4 che ammette come autovalori 1 e 0.

- V** **F** Può capitare che $F(1, 1, 0, 0) = (0, 0, 0, 0)$; $F(1, 1, -1, -1) = (1, 1, -1, -1)$ e che $F(1, 1, 1, 1) = (0, 0, 0, 0)$.
- V** **F** Può capitare che $F(1, -1, -2, 3) = (1, 2, 3, 4)$; $F(1, 1, -1, -1) = (1, 2, 3, 4)$ e che $F(1, 2, 3, 4) = (1, 2, 3, 4)$.
- V** **F** Può capitare che $F(1, 6, -2, 1) = (1, 2, 3, 4)$; $F(1, 1, -1, -1) = (1, 1, -1, -1)$ e che $F(1, 1, 1, 1) = (0, 0, 0, 0)$.
- V** **F** Può capitare che $F(1, 1, 1, 1) = (2, 2, 2, 2)$ e che $F(1, -1, 1, -1) = (2, 1, 3, 0)$.

Esercizio 2. Al variare del parametro reale k , si consideri la forma quadratica su \mathbb{R}^4 definita da

$$Q(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 + k(x_2 - x_3)^2 - k(x_4 - x_1)^2$$

Sia dato poi il sottospazio di \mathbb{R}^4

$$W = \mathcal{L}((1, 1, 0, 0), (0, -1, -1, 0), (0, 0, 0, 1)).$$

- (i) **(1,5pt)** Determinare rango e segnatura di Q al variare di k .
- (ii) **(1,5pt)** Al variare di k si trovi una base diagonalizzante per Q .
- (iii) **(1,5pt)** Al variare di k , determinare la dimensione del sottospazio ortogonale W^\perp fatto rispetto a Q .
- (iv) **(1,5pt)** Per quali valori di k i sottospazi W e W^\perp sono a somma diretta?

Esercizio 3. Sia dato uno spazio vettoriale reale V e sia $\{v_1, v_2, v_3\}$ una sua base. Al variare del parametro reale h , considerare l'endomorfismo f di V tale che

$$f(v_1) = h v_1 + 4h v_3 \quad f(v_2) = v_1 + v_2 \quad f(v_3) = -v_2 + (h - 1)v_3.$$

- (i) **(1pt)** Determinare la dimensione del nucleo di f al variare di h .
- (ii) **(1pt)** Determinare una base dell'immagine di f in corrispondenza dei valori di h per cui il rango di f vale 2.
- (iii) **(1,5pt)** Decidere della diagonalizzabilità di f quando questo ammette l'autovalore -1 .
- (iv) **(1,5pt)** Preso $v = x v_1 + y v_2 + z v_3 \in V$, determinare l'espressione di $f^{-1}(v)$ per $h = 1$.
- (v) **(1pt)** Provare che per ogni $v \in V$ si ha che $f^3(v) = f(v)$ quando $h = 0$.

Esercizio 4. (i) **(2pt)** Portare in forma canonica e classificare la quadrica:

$$\mathcal{Q}: x^2 + y^2 + 2xy + 2xz + 2yz + 2x = 0.$$

- (ii) **(2pt)** Nello spazio euclideo si consideri il piano $\pi: x - y - 2z + 8 = 0$. Si determinino i piani π_1 e π_2 aventi distanza $\sqrt{6}$ da π .
- (iii) **(2pt)** Determinare la sfera tangente a π_1 e π_2 e tangente in $A(0, 8, \sqrt{6})$ al piano $\alpha: z = \sqrt{6}$.

Esercizio 5. Sia data la curva algebrica proiettiva $\mathcal{C}: X_0 X_1 X_2 = 2X_1^3 + X_1 X_0^2 - X_0^3$.

- (i) **(1pt)** Determinare la tangente a \mathcal{C} in $P[1, 2, 1]$.
- (ii) **(1pt)** Stabilire se \mathcal{C} è una curva liscia.
- (iii) **(1pt)** Determinare i punti impropri di \mathcal{C} e le relative tangenti.
- (iv) **(3pt)** Tracciare il grafico della parte affine di \mathcal{C} (rispetto ad X_0).