

**Sapienza Università di Roma – Facoltà ICI**  
**Laurea in Ingegneria Energetica A.A. 2015/16**  
**Prova di Geometria – 30 Marzo 2016**  
**Programma 2014/15 – Prof. Cigliola**

1)	2)	3)	4)	5)	Tot.
----	----	----	----	----	------

**N.B.** La parte sovrastante è riservata al docente.

Nome:	Mat.:
-------	-------

*“Di solito la mia risposta a qualsiasi problema è una scelta tra le seguenti: ha ragione lui; sposalo; fate un figlio; obbediscigli; fate un figlio; trasferisciti nella sua città; perdonalo; cerca di capirlo; e infine fate un figlio. Se lo ami lascia che faccia l'uomo e smetti di dargli ordini.”*  
(Costanza Miriano, da “Sposati e sii sottomessa”)

**AVVERTENZE.** Non è consentito utilizzare, pena l'annullamento della prova, note, libri di testo, appunti, cellulari, tablet, supporti cartacei o elettronici in genere. È consentito utilizzare soltanto la tabella delle superficie quadriche fornita dal docente. Le risposte del primo esercizio non vanno giustificate. Tutte le altre sì ed in maniera chiara e concisa.

**Esercizio 1.**

**Parte A.** Per ciascuna delle seguenti questioni, si indichi la (sola) risposta corretta. Ogni risposta esatta vale 2 punti, ogni risposta errata  $-1$  punto ed ogni risposta non data 0 punti.

**A1)** Sia  $A$  la matrice quadrata di ordine 47 con elementi tutti uguali ad 2. Sia  $B$  la matrice di tipo  $47 \times 23$  che ha gli elementi  $b_{15, 21}$  e  $b_{29, 17}$  uguali ad 1 e tutte le altre entrate nulle. Allora

- (a)  $AB$  ha una sola colonna non nulla.
- (b)  $A^{100}$  ha le righe linearmente indipendenti.
- (c)  $B^T A^T$  ha rango 1.
- (d) la matrice  $AB$  non è definita.

**A2)** Sia data la conica  $\mathcal{C} : 1 + 5x + 6x^2 - 3y - 7xy + 2y^2 = 0$ .

- (a)  $\mathcal{C}$  è una conica di tipo ellittico.
- (b)  $\mathcal{C}$  ha per asintoto la retta  $3x - 2y + 1 = 0$ .
- (c)  $\mathcal{C}$  è una conica senza centro.
- (d)  $\mathcal{C}$  ha centro nel punto  $(\frac{1}{3}, 0)$ .

**Parte B.** Si stabilisca se le seguenti affermazioni sono vere o false. Ogni risposta esatta vale 0,5 punti, ogni risposta errata -0,25 punti ed ogni risposta non data 0 punti.

**B1)** Al variare del parametro reale  $k$ , sono dati in  $\mathbb{R}^4$  i sottospazi

$$W = \mathcal{L}((1, k, 1, k), (0, -1, 0, 2k), (1, -1, 1, k^2))$$

e

$$U = \mathcal{L}((1, 1, -1, 0), (k, 0, 0, 2k), (-1, 2, 0, k), (0, 0, 0, 0))$$

- V**    **F** Si ha che  $\dim(U + W^\perp) < 6$ , per  $k = -23$ .
- V**    **F** Per  $k = 0$  abbiamo che  $W + U^\perp = \mathbb{R}^4$ .
- V**    **F** Per  $k = 1$  gli spazi  $U$  e  $W^\perp$  sono a somma diretta.
- V**    **F** Per  $k = 1$  lo spazio  $U \cap W^\perp$  è banale.

**B2)** Sono dati nello spazio i punti  $A = (0, 0, -k)$ ,  $B = (1, 1, 0)$  e  $C = (2, -1, 1 - k)$ .

- V**    **F** I punti  $A$ ,  $B$  e  $C$  sono complanari per  $k = \frac{7}{3}$ .
- V**    **F** I punti  $A$ ,  $B$  e  $C$  non sono allineati per nessun valore di  $k$ .
- V**    **F** La retta passante per  $A$  e  $B$  è perpendicolare al piano  $\pi : x - 2y + z + \sqrt{3} = 0$  per  $k = 2$ .
- V**    **F** Il valore minimo che assume l'area del triangolo  $ABC$  è  $3\sqrt{\frac{3}{10}}$ .

**B3)** Sia  $F$  un endomorfismo simmetrico di  $\mathbb{R}^4$  che ammette come autovalori 1 e 0.

- V**    **F** Può capitare che  $F(1, 6, -2, 1) = (1, 2, 3, 4)$ ;  $F(1, 1, -1, -1) = (1, 1, -1, -1)$  e che  $F(1, 1, 1, 1) = (0, 0, 0, 0)$ .
- V**    **F** Può capitare che  $F(1, 1, 2, 3) = (1, 2, 3, 4)$ ;  $F(1, 1, -1, -1) = (1, 2, 3, 4)$  e che  $F(1, 2, 3, 4) = (1, 2, 3, 4)$ .
- V**    **F** Può capitare che  $F(1, 1, 1, 1) = (-2, -2, -2, -2)$  e che  $F(1, -1, 1, -1) = (2, 1, -3, 0)$ .
- V**    **F** Può capitare che  $F(1, 1, 0, 0) = (0, 0, 0, 0)$ ;  $F(1, 1, -1, -1) = (1, 1, -1, -1)$  e che  $F(1, 1, 1, 1) = (0, 0, 0, 0)$ .

**Esercizio 2.** Sia  $k$  un parametro reale. Si consideri il sistema lineare:

$$S: \begin{cases} x - y + z = k \\ (k - 3)x - y + z = 0 \\ (k - 2)x + 2z = k \\ (k - 1)x - y + 3z = 2k \end{cases}$$

- (i) **(3pt)** Discutere e risolvere il sistema  $S$  al variare di  $k$ .
- (ii) **(1pt)** Per quali valori di  $k$  il sistema  $S$  definisce uno spazio vettoriale?
- (iii) **(2pt)** Discutere e risolvere al variare di  $k$  il sistema omogeneo associato ad  $S$ .

**Esercizio 3.** Sia dato uno spazio vettoriale reale  $V$  e sia  $\{v_1, v_2, v_3\}$  una sua base. Al variare del parametro reale  $h$ , considerare l'endomorfismo  $f$  di  $V$  tale che

$$f(v_1) = h v_1 + 4h v_3 \quad f(v_2) = v_1 + v_2 \quad f(v_3) = -v_2 + (h - 1)v_3.$$

- (i) **(1pt)** Determinare la dimensione del nucleo di  $f$  al variare di  $h$ .
- (ii) **(1pt)** Determinare una base dell'immagine di  $f$  al variare di  $h$ .
- (iii) **(1,5pt)** Decidere della diagonalizzabilità di  $f$  quando questo ammette l'autovalore  $-1$ .
- (iv) **(1,5pt)** Preso  $v = x v_1 + y v_2 + z v_3 \in V$ , determinare l'espressione di  $f^{-1}(v)$  per  $h = 1$ .
- (v) **(1pt)** Provare che per ogni  $v \in V$  si ha che  $f^3(v) = f(v)$  quando  $h = 0$ .

**Esercizio 4.** (i) **(1pt)** Nel piano  $\pi : 2x - y = 1$  si determini una retta sghemba con la retta passante per  $A(1, 1, 1)$  e  $B(-1, 0, 1)$ .

- (ii) **(3pt)** Classificare la conica euclidea:  $\mathcal{Q} : x^2 + y^2 - 2xy + 2x = 0$ . Determinare inoltre una isometria che la trasforma nella sua forma canonica euclidea.
- (iii) **(2pt)** Nello spazio euclideo si consideri il piano  $\pi : x - y - 2z + 8 = 0$ . Si determinino i piani  $\pi_1$  e  $\pi_2$  aventi distanza  $\sqrt{6}$  da  $\pi$ .

**Esercizio 5.** Sia data la curva algebrica  $\mathcal{C} : xy = 2x^3 + x - 1$ .

- (i) **(1pt)** Stabilire se  $\mathcal{C}$  è una curva liscia.
- (ii) **(1pt)** Trovare gli asintoti di  $\mathcal{C}$ .
- (iii) **(1pt)** Determinare la tangente a  $\mathcal{C}$  in  $P(1, 2)$ .
- (iv) **(3pt)** Tracciare il grafico di  $\mathcal{C}$ .