**Sapienza Università di Roma – Facoltà ICI**
**Laurea in Ingegneria Energetica A.A. 2018/19**
**Prova1 di Geometria – 8 Febbraio 2019**
**Prof. Cigliola**

| Nome: | Mat.: |
|---|---|

**AVVERTENZE.** Non è consentito utilizzare - pena l'annullamento della prova - note, libri di testo, appunti, cellulari, tablet, supporti cartacei o elettronici in genere. Giustificare esaurientemente ogni risposta data.

**Esercizio 1.** Si considerino nello spazio euclideo i piani

$$\pi : x + 2y - 2z + 1 = 0 \qquad\qquad \sigma : x + 2y - 2z - 1 = 0.$$

(a) (**1pt**) Stabilire la posizione reciproca tra i due piani.

(b) (**2pt**) Calcolare una sfera tangente ad entrambi i piani.

(c) (**1pt**) Determinare una retta perpendicolare a $\pi$ e incidente $\sigma$.

(d) (**2pt**) Dire se esiste una retta sghemba con $r : \begin{cases} x + 2y - x - 1 = 0 \\ x + z = 3 \end{cases}$ e parallela a $\sigma$.

**Esercizio 2.** Sono dati i due sottospazi di $\mathbb{R}^4$:

$$U : \begin{cases} x_1 - 2x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 - 3x_2 + x_4 = 0 \end{cases} \qquad\qquad W : \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases}$$

(a) (**2pt**) Calcolare basi e dimensioni di $U$ e $W$.

(b) (**2pt**) Calcolare basi e dimensioni di $U + W$ e $U \cap W$.

(c) (**1pt**) Stabilire se è vero che $U^\perp \oplus W^\perp = \mathbb{R}^4$.

(d) (**1pt**) Calcolare una base ortonormale di $W$.

**Esercizio 3.** È data l'applicazione lineare $F$ da $\mathbb{R}^4$ in $\mathbb{R}^4$ tale che

$F(1,0,0,0) = (0,1,1,-1) \qquad F(0,1,0,0) = (2,-1,0,1) \qquad F(0,0,1,0) = (1,0,-2-1) \qquad F(0,0,0,1) = (1,1,-2,1).$

(a) (**1pt**) Stabilire se $F$ è iniettiva, suriettiva, invertibile.

(b) (**2pt**) Calcolare basi e dimensioni di nucleo e immagine di $F$.

(c) (**2pt**) Trovare un vettore che ha controimmagine vuota secondo $F$.

**Esercizio 4.** (**4pt**) Classificare e portare in forma canonica la conica euclidea

$$\mathscr{C} : \; x^2 - 4xy - 2y^2 + 4x - 2y - 3 = 0$$

illustrando le isometrie usate.

**Esercizio 5.** Sia data la forma quadratica $Q$ su $\mathbb{R}^4$ tale che

$$Q(x_1, x_2, x_3, x_4) = 2x_1^2 + x_2^2 - 2x_2x_3 + x_3^2 - 2x_3x_4 - 2x_4^2 + 2x_1x_2.$$

(i) (**1pt**) Stabilire se $Q$ risulta degenere.

(ii) (**2pt**) Calcolare una base di Sylvester per $Q$.

(iii) (**1pt**) Calcolare la segnatura di $Q$.

**Esercizio 6.** (a) (**3pt**) Enunciare e dimostrare il teorema di Rouché-Capelli.

(b) (**2pt**) Dare la definizione di nucleo di un'applicazione lineare e dimostrare che è un sottospazio vettoriale.

(c) (**2pt**) Dare la definizione di operatore ortogonale ed elencarne alcune proprietà.