Sapienza Università di Roma – Facoltà ICI
Laurea in Ingegneria Energetica A.A. 2015/16
Prova1 di Geometria – 13 Luglio 2016
Programma 2015/16 – Prof. Cigliola

1)	2)	3)	4)	5)	Tot.

N.B. La parte sovrastante è riservata al docente.

Nome:	Mat.:

"I patrioti non scappano quando le cose diventano difficili. Restano."
(J.C. Junker)

AVVERTENZE. Non è consentito utilizzare, pena l'annullamento della prova, note, libri di testo, appunti, cellulari, tablet, supporti cartacei o elettronici in genere. È consentito utilizzare soltanto la tabella delle superficie quadriche fornita dal docente. Le risposte del primo esercizio non vanno giustificate. Tutte le altre sì ed in maniera chiara e concisa.

Esercizio 1.
Parte A. Per ciascuna delle seguenti questioni, si indichi la (sola) risposta corretta. Ogni risposta esatta vale 2 punti, ogni risposta errata −1 punto ed ogni risposta non data 0 punti.

A1) Sia A una matrice. Si sa che A e A^T sono linearmente dipendenti. Allora

(a) A ammette l'autovalore nullo.
(b) A è nulla.
(c) A è la matrice identica.
(d) nessuna delle precedenti è vera in generale.

A2) La conica $\mathscr{C}: \ x^2 + y^2 + 2xy - 2x + 1 = 0$

(a) è una ellisse degenere.
(b) ha forma canonica affine data da $X^2 - Y^2 = 0$.
(c) è una parabola generale.
(d) ha chiusura proiettiva di rango 1.

Parte B. Si stabilisca se le seguenti affermazioni sono vere o false. Ogni risposta esatta vale $0,5$ punti, ogni risposta errata $-0,25$ punti ed ogni risposta non data 0 punti.

B1) Al variare del parametro reale k, sono dati in $\mathbb{R}^4$ i sottospazi

$$W: x_1 - x_2 - x_3 + (k+1)x_4 = 0 \qquad \text{e} \qquad U = \mathcal{L}((1,0,0,1),\ (1,-1,0,0),\ (0,0,0,0),\ (2,-1,0,k))$$

V **F** Lo spazio U ha dimensione 2 per ogni valore di k.

V **F** Per $k = 23\sqrt{5}$ gli spazi W e U non sono a somma diretta.

V **F** Per $k = 1724$ si ha che $W^\perp \oplus U^\perp = \mathbb{R}^4$.

V **F** Per $k = -11$ lo spazio $U \cap W^\perp$ ha dimensione 1.

B2) È data nello spazio euclideo $\mathbb{E}^3(\mathbb{R})$ la circonferenza $S: \begin{cases} x^2+y^2+z^2 = 9 \\ z = 1 \end{cases}$

Allora la circonferenza S

V **F** ha raggio 8.

V **F** ha centro nel punto $(1,0,0)$.

V **F** è contenuta nella quadrica $z = \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{8}y^2$.

V **F** è tangente al piano $\pi: x = 2$.

B3) La quadrica $\mathcal{Q}: 2x^2 - z^2 + xy + yz - 2 = 0$

V **F** passa per l'origine.

V **F** contiene punti a coordinate tutte intere.

V **F** interseca tutti i piani di tipo $z = k$, con $k \in \mathbb{R}$.

V **F** è un ellissoide.

Esercizio 2. Sono dati nello spazio euclideo $\mathbb{E}^3(\mathbb{R})$ i due piani $\pi_1: x+y-z=0$ e $\pi_2: x+y=0$.

(i) (**2pt**) Esibire una retta r contenuta in π_1 ed una retta s contenuta in π_2 tali che $r \parallel s$.

(ii) (**2pt**) Determinare la sfera avente centro sul piano π_2 e tangente al piano π_1 nel punto $P(1,1,2)$.

(iii) (**2pt**) Trovare nel piano π_1 tre punti che determinano un triangolo di area 1.

Esercizio 3. È data su $\mathbb{R}^4$ la forma quadratica

$$Q(x,y,z,t) = x^2 + (y-t)^2 + (z-x)^2.$$

(i) (**1pt**) Determinare la matrice associata a Q rispetto alla base

$$\mathcal{B} = \{(1,1,0,0),\ (0,0,1,1),\ (1,0,0,1),\ (0,0,0,1)\}$$

(ii) (**1pt**) Determinare rango e segnatura di Q.

(iii) (**1pt**) Determinare una base diagonalizzante per Q.

(iv) (**1pt**) Calcolare, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la dimensione del sottospazio ortogonale rispetto a Q di

$$W = \mathcal{L}((1,1,1,0),\ (1,k,0,-k))$$

(v) (**1pt**) Trovare una base di Sylvester per Q.

(vi) (**1pt**) Dimostrare che ogni base diagonalizzante per Q contiene necessariamente un vettore del tipo $(0,\alpha,0,\alpha)$, per qualche $\alpha \in \mathbb{R}$.

Esercizio 4. Al variare di $k \in \mathbb{R}$, è dato l'endomorfismo $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ associato alla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & k & 0 & 0 \\ k & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

rispetto alla base canonica.

(i) (**2pt**) Determinare una base e la dimensione del nucleo e dell'immagine di F al variare del parametro k.

(ii) (**2pt**) Per quali valori di k si ha $\operatorname{Ker} F \oplus \operatorname{Im} F = \mathbb{R}^4$?

(iii) (**2pt**) Determinare, se esiste, per $k = 0$ una base ortonormale di $\mathbb{R}^4$ costituita da autovettori per F.

Esercizio 5. Si consideri la curva algebrica piana

$$\mathscr{C} :\ x^3 + xy^2 + y^2 - 3x^2 = 0.$$

(i) (**1pt**) Scrivere l'equazione della chiusura proiettiva di $\mathscr{C}$ rispetto ad X_0.

(ii) (**1pt**) Determinare i punti singolari di $\mathscr{C}$ e i relativi complessi tangenti.

(iii) (**1pt**) Trovare gli asintoti di $\mathscr{C}$.

(iv) (**1pt**) Determinare i punti impropri di $\mathscr{C}$.

(v) (**2pt**) Tracciare il grafico di $\mathscr{C}$.