Sapienza Università di Roma – Facoltà ICI
Laurea in Ingegneria Energetica A.A. 2015/16
Prova di Geometria – 13 Luglio 2016
Programma 2014/15 – Prof. Cigliola

1)	2)	3)	4)	5)	Tot.

N.B. La parte sovrastante è riservata al docente.

Nome:	Mat.:

"*I patrioti non scappano quando le cose diventano difficili. Restano.*"
(J.C. Junker)

AVVERTENZE. Non è consentito utilizzare, pena l'annullamento della prova, note, libri di testo, appunti, cellulari, tablet, supporti cartacei o elettronici in genere. È consentito utilizzare soltanto la tabella delle superficie quadriche fornita dal docente. Le risposte del primo esercizio non vanno giustificate. Tutte le altre sì ed in maniera chiara e concisa.

Esercizio 1.
Parte A. Per ciascuna delle seguenti questioni, si indichi la (sola) risposta corretta. Ogni risposta esatta vale 2 punti, ogni risposta errata −1 punto ed ogni risposta non data 0 punti.

A1) Sia A una matrice. Si sa che A e A^T sono linearmente dipendenti. Allora:

(a) A è la matrice identica.
(b) A è simmetrica.
(c) A può essere di tipo 3×2.
(d) nessuna delle precedenti è vera in generale.

A2) La conica $\mathscr{C}: \ x^2 + y^2 + 2xy - 2x + 1 = 0$

(a) è una ellisse degenere.
(b) ha forma canonica data da $X^2 - Y^2 = 1$.
(c) non ha centro di simmetria.
(d) è un'iperbole di rango massimo.

Parte B. Si stabilisca se le seguenti affermazioni sono vere o false. Ogni risposta esatta vale $0,5$ punti, ogni risposta errata $-0,25$ punti ed ogni risposta non data 0 punti.

B1) Al variare del parametro reale k, sono dati in $\mathbb{R}^4$ i sottospazi

$$W: x_1 - x_2 - x_3 + (k+1)x_4 = 0 \qquad \text{e} \qquad U = \mathcal{L}((1,0,0,1),\ (1,-1,0,0),\ (0,0,0,0),\ (2,-1,0,k))$$

$\boxed{\textbf{V}}$ $\boxed{\textbf{F}}$ Lo spazio U ha dimensione 2 per ogni valore di k.

$\boxed{\textbf{V}}$ $\boxed{\textbf{F}}$ Per $k = \sqrt{3} - 3$ gli spazi W e U non sono a somma diretta.

$\boxed{\textbf{V}}$ $\boxed{\textbf{F}}$ Per $k = -31$ lo spazio $U \cap W^\perp$ ha dimensione 1.

$\boxed{\textbf{V}}$ $\boxed{\textbf{F}}$ Per $k = 14$ si ha che $W^\perp \oplus U^\perp = \mathbb{R}^4$.

B2) Il sistema lineare

$$\begin{cases} x - 31y + z + 3t = 11 \\ x - 31y + z + 3t = h \end{cases}$$

$\boxed{\textbf{V}}$ $\boxed{\textbf{F}}$ ha infinite soluzioni per ogni valore di h.

$\boxed{\textbf{V}}$ $\boxed{\textbf{F}}$ rappresenta una retta nello spazio per ogni valore di h.

$\boxed{\textbf{V}}$ $\boxed{\textbf{F}}$ ha sistema omogeneo associato con soltanto la soluzione banale.

$\boxed{\textbf{V}}$ $\boxed{\textbf{F}}$ è impossibile per $h = 11$.

B3) I vettori

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0\right), \qquad \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0\right) \qquad (0,0,0,1)$$

$\boxed{\textbf{V}}$ $\boxed{\textbf{F}}$ costituiscono una base ortogonale di $\mathbb{R}^4$.

$\boxed{\textbf{V}}$ $\boxed{\textbf{F}}$ costituiscono una base di $\mathbb{R}^3$.

$\boxed{\textbf{V}}$ $\boxed{\textbf{F}}$ costituiscono una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$.

$\boxed{\textbf{V}}$ $\boxed{\textbf{F}}$ sono a due a due ortogonali.

Esercizio 2. Sono dati nello spazio euclideo $\mathbb{E}^3(\mathbb{R})$ i due piani $\pi_1 : x + y - z = 0$ e $\pi_2 : x - y = 0$.

(i) (**2pt**) Esibire una retta r contenuta in π_1 ed una retta s contenuta in π_2 tali che $r \parallel s$.

(ii) (**2pt**) Cercare in π_1 una retta sghemba con l'asse y.

(iii) (**2pt**) Trovare nel piano π_2 tre punti che determinano un triangolo di area 1.

Esercizio 3. Al variare di $k \in \mathbb{R}$, è dato l'endomorfismo $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ associato alla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & k & 0 \\ 0 & k & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

rispetto alla base canonica.

(i) (**2pt**) Determinare una base e la dimensione del nucleo e dell'immagine di F al variare del parametro k.

(ii) (**2pt**) Per quali valori di k si ha $\operatorname{Ker} F \oplus \operatorname{Im} F = \mathbb{R}^4$?

(iii) (**2pt**) Determinare, se esiste, per $k = 0$ una base ortonormale di $\mathbb{R}^4$ costituita da autovettori per F.

Esercizio 4. Discutere e risolvere il seguente sistema lineare al variare del parametro reale m:

$$\begin{cases} x - y + mz = 0 \\ my - z = 0 \\ -x + y + z = m \end{cases}$$

Esercizio 5. Si consideri la curva algebrica piana

$$\mathscr{C} : \; x^3 + xy^2 + y^2 - x^2 = 0.$$

(i) (**1pt**) Scrivere l'equazione della chiusura proiettiva di $\mathscr{C}$ rispetto ad X_0.

(ii) (**1pt**) Determinare i punti singolari di $\mathscr{C}$ e i relativi complessi tangenti.

(iii) (**1pt**) Trovare gli asintoti di $\mathscr{C}$.

(iv) (**1pt**) Determinare i punti impropri di $\mathscr{C}$.

(v) (**2pt**) Tracciare il grafico di $\mathscr{C}$.