Sapienza Università di Roma – Facoltà ICI
Laurea in Ingegneria Energetica A.A. 2014/15
Prova2 di Geometria – 14 Luglio 2015
Prof. Cigliola

1)	2)	3)	4)	5)	FAC.:

N.B. La parte sovrastante è riservata al docente.

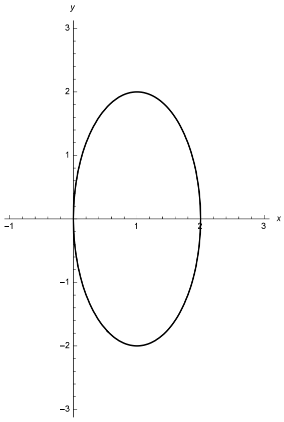
Nome	Matricola

"Oggi niente di nuovo."
(dal diario personale di Luigi XVI, 14 Luglio 1798)

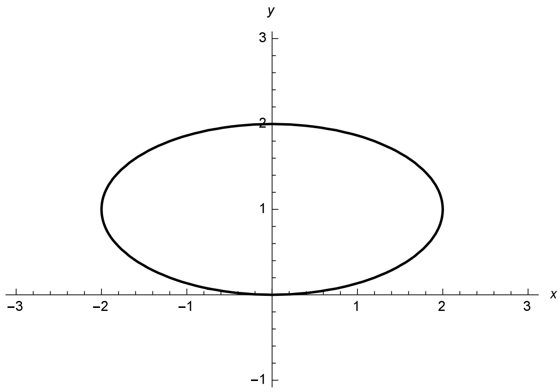
Esercizio 1.

Parte A. Per ciascuna delle seguenti questioni, si indichi la (sola) risposta corretta. Ogni risposta esatta vale 2 punti, ogni risposta errata -1 punto ed ogni risposta non data 0 punti.

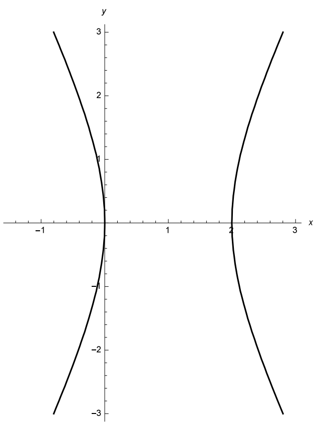
A1) Quale tra i seguenti è il grafico della curva $\mathscr{C}: \; 4x^2 - y^2 - 8x = 0$?



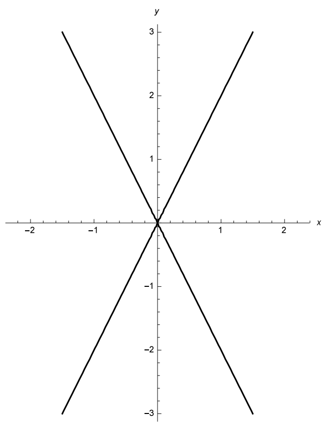
(a)



(b)



(c)



(d)

A2) Sia A una matrice quadrata di ordine 2015 con tutti gli elementi nulli tranne al più due che sono uguali ad 1. Sia poi B la matrice di tipo 2015×2 che ha la prima colonna nulla e la seconda con tutti gli elementi uguali a 1. Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

(a) La matrice A ha rango 1.
(b) La matrice AB ha rango 1.
(c) La matrice B ha rango 2.
(d) La matrice AB ha rango 2.

Parte B. Si stabilisca se le seguenti affermazioni sono vere o false. Ogni risposta esatta vale $0,5$ punti, ogni risposta errata $-0,25$ punti ed ogni risposta non data 0 punti.

B1) Siano A e B due matrici simmetriche di ordine 3.

V **F** La matrice $A - B$ è diagonalizzabile.
V **F** La matrice AB è diagonalizzabile.
V **F** La matrice AB è simmetrica.
V **F** La matrice AB ha almeno un autovalore reale.

B2) Sia V uno spazio vettoriale di dimensione 4 con base $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$. Siano poi E ed F due sottospazi di V di dimensione 3.

V **F** Sia ha che $\dim(E + F) \leqslant 3$.
V **F** Risulta che $\dim(E \cap F) = 0$.
V **F** Risulta che $\dim(E \cap F) \geqslant 3$.
V **F** Risulta che $\dim(E \cap F) > 1$.

B3) Siano dati nel piano il punto $P(-1, 1)$ e la retta $r : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 - 2t. \end{cases}$

V **F** La distanza di P da r vale $\frac{4}{\sqrt{5}}$.
V **F** Esiste una sola circonferenza di centro P e tangente la retta r.
V **F** La conica $xy - x + y - 1 = 0$ incontra r nei punti $Q_1(0, 1)$ e $Q_2(-1, 3)$.
V **F** La retta passante per P e perpendicolare ad r ha equazione $y + 2x + 1 = 0$.

Esercizio Facoltativo. Siano date r ed s due rette nello spazio con vettori direzionali rispettivamente v_r e v_s. Siano poi R un punto di r ed S un punto della retta s. Si dimostri che le rette r ed s sono sghembe se e solo se il prodotto misto $\overrightarrow{RS} \cdot (v_r \wedge v_s) = 0$.

Esercizio 2. Si considerino le matrici $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ ed il sottospazio vettoriale di $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$:

$$U = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}\right).$$

(a) (**1pt**) Determinare una base e la dimensione di U.

(b) **(1,5pt)** Dimostrare che l'insieme

$$W = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \,|\, AX = XB\}$$

è un sottospazio vettoriale di $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Si determini una sua base e la sua dimensione.

(c) **(1,5pt)** Determinare una base e la dimensione di $U + W$ e di $U \cap W$.

(d) (**1pt**) Determinare un sottospazio V di $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ tale che $W \oplus V = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

(e) (**1pt**) Provare che per ogni $M \in W$ si ha anche che $M^T \in W$.

Esercizio 3. (a) Un'applicazione lineare diagonalizzabile $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ha per autovalori -1 e 1 con autospazi associati:

$$E(1) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + y + z = x + y - z = 0\}$$

$$E(-1) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y - z = 2x - 2y - 2z = 0\}$$

Determinare la matrice associata ad F rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$.

(b) È data la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Determinare, se esistono, una matrice ortogonale M ed una matrice diagonale D tali che $D = M^T AM$.

Esercizio 4. Siano date le tre rette:

$$r_1 : \begin{cases} x = 3 + t \\ y = -2 + 2t \\ z = 1 - t \end{cases} \qquad r_2 : \begin{cases} x + z + 2 = 0 \\ y - 2z - 5 = 0 \end{cases} \qquad r_3 : \begin{cases} 2x - y + 1 = 0 \\ 3x - y + z + 3 = 0. \end{cases}$$

Classificare la posizione reciproca delle tre rette prese a due a due. Si determini il piano che le contiene se sono complanari, il punto comune se sono incidenti, la loro distanza se sono parallele.

Esercizio 5. Si consideri la conica euclidea

$$\mathscr{C}: \; xy + x - y + 1 = 0.$$

(a) (**1pt**) Classificare $\mathscr{C}$ e determinare una sua forma canonica $\mathscr{C}_0$.

(b) (**1pt**) Stabilire se $\mathscr{C}$ è una conica a centro e in caso affermativo determinarne il centro.

(c) (**1pt**) Stabilire se $\mathscr{C}$ ammette asintoti ed in caso affermativo li si determinino.

(d) (**1pt**) Trovare una isometria f che trasforma $\mathscr{C}$ in $\mathscr{C}_0$.

(e) (**1pt**) Dati i punti $A(1,1)$, $B(-2,3)$ e $C(-2,-1)$, si determini l'area del triangolo di vertici $f(A)$, $f(B)$ e $f(C)$.

(f) (**1pt**) Si disegni la conica $\mathscr{C}$.

Esercizio 5. Alternativo. Si considerino i punti $A(1,0)$ e $B(-1,0)$. Sia $\mathscr{C}$ il luogo dei punti $P(x,y)$ del piano tali che

$$\overline{AP} \cdot \overline{BP} = 1$$

(Si ricordi che $\overline{AP}$ indica la lunghezza di $\overrightarrow{AP}$, ovvero la distanza tra i punti A e P).

(a) (**1pt**) Determinare l'equazione di $\mathscr{C}$ e verificare che si tratta di una curva algebrica di quarto grado.

(b) (**1pt**) Provare che l'origine O è l'unico punto singolare di $\mathscr{C}$ e determinarne il complesso tangente a $\mathscr{C}$.

(c) (**1pt**) Provare che $\mathscr{C}$ non ammette asintoti.

(d) (**2pt**) Tracciare il grafico di $\mathscr{C}$.

(e) (**1pt**) Contare i punti singolari della curva piana definita da

$$(x^4 + y^4 + 2x^2y^2 - 2x^2 + 2y^2)(x^2 + y^2 - r^2) = 0$$

al variare del numero reale $r > 0$.