

Nome:	Mat.:
-------	-------

AVVERTENZE. Non è consentito utilizzare - pena l'annullamento della prova - note, libri di testo, appunti, cellulari, tablet, supporti cartacei o elettronici in genere. Giustificare esaurientemente ogni risposta data.

Esercizio 1. Si considerino nello spazio euclideo i piani

$$\pi : 3x + 2y - z + 1 = 0 \qquad \sigma : x + y - 2z - 3 = 0.$$

- (a) (1pt) Stabilire la posizione reciproca tra i due piani.
- (b) (2pt) Calcolare una sfera tangente ad entrambi i piani.
- (c) (1pt) Determinare una retta perpendicolare a π e incidente σ .
- (d) (2pt) Dire se esiste una retta sghemba con $r : \begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ x + 2z = 3 \end{cases}$ e parallela a σ .

Esercizio 2. Sono dati i due sottospazi di \mathbb{R}^4 :

$$U : \begin{cases} x_1 - 2x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_4 = 0 \end{cases} \qquad W : \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

- (a) (2pt) Calcolare basi e dimensioni di U e W .
- (b) (2pt) Calcolare basi e dimensioni di $U + W$ e $U \cap W$.
- (c) (1pt) Stabilire se è vero che $U^\perp \oplus W^\perp = \mathbb{R}^4$.
- (d) (1pt) Calcolare una base ortonormale di W .

Esercizio 3. È data l'applicazione lineare F da \mathbb{R}^4 in $\mathbb{R}_{\leq 4}[x]$ tale che

$$F(1, 0, 0, 0) = (0, 0, 1, -1) \quad F(0, 1, 0, 0) = (2, 2, 0, 0) \quad F(0, 0, 1, 0) = (1, 3, -2, -1) \quad F(0, 0, 0, 1) = (1, 1, -1, 1).$$

- (a) (1pt) Stabilire se F è iniettiva, suriettiva, invertibile.
- (b) (2pt) Calcolare basi e dimensioni di nucleo e immagine di F .
- (c) (2pt) Trovare un vettore che ha controimmagine vuota secondo F .

Esercizio 4. (4pt) Classificare e portare in forma canonica la conica euclidea

$$\mathcal{C} : x^2 - 4xy - 2y^2 + 2x - 2y - 5 = 0$$

illustrando le isometrie usate.

Esercizio 5. Sia data la forma quadratica Q su \mathbb{R}^4 tale che

$$Q(x_1, x_2, x_3, x_4) = 2x_1^2 + x_2^2 - 2x_2x_3 + x_3^2 - 2x_3x_4 - 2x_4^2.$$

- (i) (1pt) Stabilire se Q risulta degenera.
- (ii) (2pt) Calcolare una base di Sylvester per Q .
- (iii) (1pt) Calcolare la segnatura di Q .

Esercizio 6. (a) (3pt) Enunciare e dimostrare il teorema di Rouché-Capelli.

- (b) (2pt) Dare la definizione di nucleo di un'applicazione lineare e dimostrare che è un sottospazio vettoriale.
- (c) (2pt) Dare la definizione di operatore ortogonale ed elencarne alcune proprietà.