

Sapienza Università di Roma – Facoltà ICI
Laurea in Ingegneria Elettrotecnica A.A. 2017/18
Appello di Geometria – 8 Giugno 2018

1)	2)	3)	4)	5)	Teoria	Tot.
----	----	----	----	----	--------	------

N.B. La parte sovrastante è riservata al docente.

Nome:	Mat.:
-------	-------

L'esame scritto si intende superato se la somma dei punti nei primi 5 esercizi è maggiore o uguale a quindici. La prova si intende superata se il punteggio totale è maggiore o uguale a diciotto.

Esercizio 1. Sono dati in \mathbb{R}^4 il sottospazio $U = \mathcal{L}((1, -1, 0, 1), (1, 2, 0, -2))$ e W il sottospazio definito dal sistema omogeneo
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$$

- (a) **(2pt)** Calcolare la dimensione ed una base di U , W , $U + W$ e $U \cap W$.
- (b) **(2pt)** Stabilire se U e W sono a somma diretta.
- (c) **(2pt)** Completare la base di U ad una base di \mathbb{R}^4 .

Esercizio 2. Sia \mathcal{C} la circonferenza del piano avente per diametro il segmento di estremi $A(-1, 1)$ e $B(3, 3)$.

- (a) **(2pt)** Determinare l'equazione di \mathcal{C} .
- (b) **(2pt)** Determinare raggio e centro di \mathcal{C} .
- (c) **(2pt)** Determinare la retta parallela all'asse x che interseca la circonferenza nel suo diametro.

Esercizio 3. Sia dato l'endomorfismo F di \mathbb{R}^4 associato alla matrice

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

rispetto alla base canonica.

- (a) **(3pt)** Calcolare la dimensione ed una base di nucleo e immagine di F .
- (b) **(3pt)** Calcolare autovalori ed autovettori di F e stabilire se esso è diagonalizzabile.

Esercizio 4. Sono dati il punto $P(-1, 0, 2)$ la retta $r : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 \\ z = 3 \end{cases}$

- (a) **(2pt)** Determinare il piano che contiene P ed r .
- (b) **(2pt)** Calcolare la distanza tra P da r .
- (c) **(2pt)** Siano $A(2, 1, -1)$ e $B(0, 1, 1)$. Calcolare l'area del triangolo APB .

Esercizio 5. **(6pt)** Discutere e risolvere al variare di $k \in \mathbb{R}$ il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} (k-1)x + y + z = 1 \\ x + y + z = 3 \\ x + y + z = k \end{cases}$$

Esercizio 6. Siano V uno spazio vettoriale di dimensione n ed $F : V \rightarrow V$ un endomorfismo di V . Siano B e B' due basi di V .

- (a) **(1pt)** Dare la definizione di matrice associata ad F rispetto alle basi B e B' .
- (b) **(2pt)** Dimostrare la formula $n = \dim \text{Im } F + \dim \text{Ker } F$.

Esercizio 7. **(3pt)** Quali sono le posizioni reciproche di due rette nello spazio? Assieme alla classificazione si facciano anche degli esempi.