Sapienza Università di Roma – Facoltà ICI
Laurea in Ingegneria Energetica A.A. 2015/16
Prova2 di Geometria – 20 Giugno 2016
Programma 2015/16 – Prof. Cigliola

1)	2)	3)	4)	5)	Tot.

N.B. La parte sovrastante è riservata al docente.

Nome:	Mat.:

"*Se non ti mobiliti per difendere i diritti di qualcuno che in quel momento ne è privato, quando poi intaccheranno i tuoi, nessuno si muoverà per te. E ti ritroverai solo*"
(H. Milk)

AVVERTENZE. Non è consentito utilizzare, pena l'annullamento della prova, note, libri di testo, appunti, cellulari, tablet, supporti cartacei o elettronici in genere. È consentito utilizzare soltanto la tabella delle superficie quadriche fornita dal docente. Le risposte del primo esercizio non vanno giustificate. Tutte le altre sì ed in maniera chiara e concisa.

Esercizio 1.
Parte A. Per ciascuna delle seguenti questioni, si indichi la (sola) risposta corretta. Ogni risposta esatta vale 2 punti, ogni risposta errata -1 punto ed ogni risposta non data 0 punti.

A1) Sia A una matrice quadrata di ordine 51 con elementi uguali ad -1, 0 oppure 1. Quale tra le seguenti è **falsa**?

(a) A può avere rango massimo.
(b) La matrice $2A$ ha necessariamente determinante positivo.
(c) A^3 può non essere invertibile.
(d) A può ammettere l'autovalore 50.

A2) Sia data la quadrica $\mathscr{Q}: \; x^2 + y^2 - z^2 + 2xy = 0$. Allora

(a) $\mathscr{Q}$ è un'iperboloide.
(b) $\mathscr{Q}$ è un cilindro.
(c) $\mathscr{Q}$ è un paraboloide.
(d) $\mathscr{Q}$ è unione di due piani.

Parte B. Si stabilisca se le seguenti affermazioni sono vere o false. Ogni risposta esatta vale $0,5$ punti, ogni risposta errata $-0,25$ punti ed ogni risposta non data 0 punti.

B1) Al variare del parametro reale h, sono dati in $\mathbb{R}^4$ i sottospazi

$$U: \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_4 - hx_2 - hx_3 = 0 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad W = \mathcal{L}((1,1,1,0),\ (0,0,0,0),\ (h,0,0,h))$$

V **F** Per $h = -1$ gli spazi U e W sono a somma diretta.

V **F** Lo spazio W ha dimensione 2 per ogni valore di h.

V **F** Per $h = 1$ lo spazio $W \cap U^{\perp}$ ha dimensione 1.

V **F** Per $h = 0$ si ha che $U \oplus W^{\perp} = \mathbb{R}^4$.

B2) Si consideri la curva algebrica piana

$$\mathscr{C}:\ (x+y)xy - x^2 - y^2 = 0.$$

V **F** La curva $\mathscr{C}$ non ha punti impropri singolari.

V **F** La curva $\mathscr{C}$ ha tre asintoti distinti.

V **F** La curva $\mathscr{C}$ ha solo un punto singolare.

V **F** La curva $\mathscr{C}$ interseca tutte le rette di tipo $y = \alpha$, con $\alpha \in \mathbb{R}$.

B3) La circonferenza

$$\mathscr{C}:\ x^2 + y^2 + 2x + y - 3 = 0$$

V **F** interseca tutte le rette passanti per il punto $(-1;-1)$.

V **F** ha raggio $r = \frac{\sqrt{17}}{4}$.

V **F** ha centro nel punto $(-1;-\frac{1}{2})$.

V **F** stacca sulla retta $y = -2$ una corda di misura $2\sqrt{2}$.

Esercizio 2. Al variare del parametro reale k, si consideri la forma bilineare simmetrica b su $\mathbb{R}^4$ associata alla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & k \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ k & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Sia $W = \mathcal{L}((1,-1,0,0),\ (1,0,0,1)) \subset \mathbb{R}^4$ e $W^{\perp}$ il sottospazio ortogonale di W rispetto a b.

(i) (**2pt**) Determinare rango e segnatura di b al variare di k.

(ii) (**2pt**) Al variare di k si trovi una base diagonalizzante per b.

(iii) (**2pt**) Per quali valori di k i sottospazi W e $W^{\perp}$ sono a somma diretta?

Esercizio 3. Al variare di $k \in \mathbb{R}$, è dato l'endomorfismo F di $\mathbb{R}_{\leqslant 3}[x]$ definito da:

$$F(1) = -k + kx \qquad F(x) = x \qquad F(x^2) = 1 + x^2 + (k-1)x^3 \qquad F(x^3) = -k + kx + kx^3$$

(i) (**1pt**) Determinare la dimensione del nucleo e dell'immagine di F al variare di k.

(ii) (**1pt**) Determinare una base del nucleo e dell'immagine di F al variare di k.

(iii) (**1pt**) Determinare la controimmagine del polinomio $p(x) = 1 + x - x^3$, al variare di k.

(iv) (**3pt**) Stabilire per quali valori di k l'endomorfismo F è diagonalizzabile e determinare una base diagonalizzante in corrispondenza di uno di tali valori.

Esercizio 4. Nello spazio sono date le rette

$$r: \begin{cases} y = 1 \\ z = 2x \end{cases} \qquad \text{e} \qquad s: \begin{cases} x = 1 \\ z = y \end{cases}$$

(i) (**2pt**) Stabilire la posizione reciproca tra r ed s.

(ii) (**2pt**) Calcolare la distanza tra r ed s.

(iii) (**2pt**) Determinare le equazioni delle sfere che hanno centro sul piano $\pi: \ x + y + z = 0$, che sono tangenti alla retta r nel punto $A(0,1,0)$ e che sono tangenti alla retta s.

Esercizio 5. Al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$, sia data la famiglia di coniche

$$\mathscr{F}: kx^2 + 4xy + y^2 - 4x - 2y + 1 = 0.$$

Si consideri poi la conica proiettiva

$$\mathscr{A}: \ X_1^2 - X_2^2 + X_0^2 + 2X_1X_0 + 2X_2X_0 = 0.$$

(i) (**1pt**) Provare che la famiglia $\mathscr{F}$ è costituita da coniche tutte degeneri.

(ii) (**2pt**) Classificare al variare di k le coniche della famiglia $\mathscr{F}$.

(iii) (**2pt**) Trovare un cambiamento di coordinate omogenee che porta la conica $\mathscr{A}$ nella sua forma canonica proiettiva.

(iv) (**1pt**) Provare che non esiste alcun cambiamento di coordinate omogenee che trasforma la chiusura proiettiva delle coniche della famiglia $\mathscr{F}$ nella conica $\mathscr{A}$.