Sapienza Università di Roma – Facoltà ICI
Laurea in Ingegneria Energetica A.A. 2015/16
Prova1 di Geometria – 20 Giugno 2016
Programma 2015/16 – Prof. Cigliola

1)	2)	3)	4)	5)	Tot.

N.B. La parte sovrastante è riservata al docente.

Nome:	Mat.:

"*Se non ti mobiliti per difendere i diritti di qualcuno che in quel momento ne è privato, quando poi intaccheranno i tuoi, nessuno si muoverà per te. E ti ritroverai solo*"
(H. Milk)

AVVERTENZE. Non è consentito utilizzare, pena l'annullamento della prova, note, libri di testo, appunti, cellulari, tablet, supporti cartacei o elettronici in genere. È consentito utilizzare soltanto la tabella delle superficie quadriche fornita dal docente. Le risposte del primo esercizio non vanno giustificate. Tutte le altre sì ed in maniera chiara e concisa.

Esercizio 1.
Parte A. Per ciascuna delle seguenti questioni, si indichi la (sola) risposta corretta. Ogni risposta esatta vale 2 punti, ogni risposta errata −1 punto ed ogni risposta non data 0 punti.

A1) Sia A una matrice quadrata di ordine 44 con elementi uguali ad 1, 0 oppure -1. Allora

(a) A può avere al massimo rango 30.
(b) A^3 non può essere invertibile.
(c) A non può ammettere l'autovalore nullo.
(d) nessuna delle precedenti è vera.

A2) Sia data la quadrica $\mathscr{Q}: \ x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - 2x = 0$. Allora

(a) $\mathscr{Q}$ è un'iperboloide.
(b) $\mathscr{Q}$ è un cilindro.
(c) $\mathscr{Q}$ è un paraboloide.
(d) $\mathscr{Q}$ è unione di due piani.

Parte B. Si stabilisca se le seguenti affermazioni sono vere o false. Ogni risposta esatta vale $0,5$ punti, ogni risposta errata $-0,25$ punti ed ogni risposta non data 0 punti.

B1) Al variare del parametro reale k, sono dati in $\mathbb{R}^4$ i sottospazi

$$W: \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_4 - kx_2 - kx_3 = 0 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad U = \mathcal{L}\big((1,1,1,0),\ (0,0,0,0),\ (k,0,0,k)\big)$$

$\boxed{\textbf{V}}$ $\boxed{\textbf{F}}$ Lo spazio U ha dimensione 2 per ogni valore di k.

$\boxed{\textbf{V}}$ $\boxed{\textbf{F}}$ Per $k = 0$ gli spazi W e U sono a somma diretta.

$\boxed{\textbf{V}}$ $\boxed{\textbf{F}}$ Per $k = 1$ si ha che $W \oplus U^{\perp} = \mathbb{R}^4$.

$\boxed{\textbf{V}}$ $\boxed{\textbf{F}}$ Per $k = -1$ lo spazio $U \cap W^{\perp}$ ha dimensione 1.

B2) Si consideri la curva algebrica piana

$$\mathscr{C}: \ (x+y)xy + x^2 + y^2 = 0.$$

$\boxed{\textbf{V}}$ $\boxed{\textbf{F}}$ La curva $\mathscr{C}$ non interseca gli assi.

$\boxed{\textbf{V}}$ $\boxed{\textbf{F}}$ La curva $\mathscr{C}$ ammette per asintoti gli assi cartesiani.

$\boxed{\textbf{V}}$ $\boxed{\textbf{F}}$ La curva $\mathscr{C}$ non ha punti singolari.

$\boxed{\textbf{V}}$ $\boxed{\textbf{F}}$ La curva $\mathscr{C}$ non ha punti singolari impropri.

B3) La circonferenza

$$\mathscr{C}: \ x^2 + y^2 - x + 2y - 3 = 0$$

$\boxed{\textbf{V}}$ $\boxed{\textbf{F}}$ interseca tutte le rette passanti per il punto $(1; -\frac{3}{2})$.

$\boxed{\textbf{V}}$ $\boxed{\textbf{F}}$ ha raggio $r = 4,1$.

$\boxed{\textbf{V}}$ $\boxed{\textbf{F}}$ ha centro nel punto $(-\frac{1}{2}; 1)$.

$\boxed{\textbf{V}}$ $\boxed{\textbf{F}}$ stacca sulla retta $y = x$ una corda di misura $\frac{5}{2}\sqrt{2}$.

Esercizio 2. Al variare del parametro reale k, si consideri la forma bilineare simmetrica b su $\mathbb{R}^4$ associata alla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & k \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ k & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Sia $W = \mathcal{L}\big((1,1,0,0),\ (1,0,0,1)\big) \subset \mathbb{R}^4$ e $W^{\perp}$ il sottospazio ortogonale di W rispetto a b.

(i) **(2pt)** Determinare rango e segnatura di b al variare di k.

(ii) **(2pt)** Al variare di k si trovi una base diagonalizzante per b.

(iii) **(2pt)** Per quali valori di k i sottospazi W e $W^{\perp}$ sono a somma diretta?

Esercizio 3. Al variare di $k \in \mathbb{R}$, è dato l'endomorfismo F di $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ definito da:

$$F\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-k & k\\0 & 0\end{pmatrix} \qquad F\begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix} \qquad F\begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\1 & k-1\end{pmatrix} \qquad F\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-k & k\\0 & k\end{pmatrix}$$

(i) (**1pt**) Determinare la dimensione del nucleo e dell'immagine di F al variare di k.

(ii) (**1pt**) Determinare una base del nucleo e dell'immagine di F al variare di k.

(iii) (**1pt**) Determinare la controimmagine della matrice $A = \begin{pmatrix}1 & 1\\0 & -1\end{pmatrix}$ al variare di k.

(iv) (**3pt**) Stabilire per quali valori di k l'endomorfismo F è diagonalizzabile e determinare una base diagonalizzante in corrispondenza di uno di tali valori.

Esercizio 4. Nello spazio sono date le rette

$$r: \begin{cases} x = 1 \\ z = 2y \end{cases} \qquad \text{e} \qquad s: \begin{cases} y = 1 \\ z = x \end{cases}$$

(i) (**2pt**) Stabilire la posizione reciproca tra r ed s.

(ii) (**2pt**) Calcolare la distanza tra r ed s.

(iii) (**2pt**) Determinare le equazioni delle sfere che hanno centro sul piano $\pi: \ x + y + z = 0$, che sono tangenti alla retta r nel punto $A(1,0,0)$ e che sono tangenti alla retta s.

Esercizio 5. Al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$, sia data la famiglia di coniche

$$\mathscr{F} : kx^2 + 4xy + y^2 - 4x - 2y + 1 = 0.$$

Si consideri poi la conica proiettiva

$$\mathscr{A}: \ X_1^2 + 2X_2^2 - X_0^2 + 2X_1X_2 - 2X_2X_0 = 0.$$

(i) (**1pt**) Provare che la famiglia $\mathscr{F}$ è costituita da coniche tutte degeneri.

(ii) (**2pt**) Classificare al variare di k le coniche della famiglia $\mathscr{F}$.

(iii) (**2pt**) Trovare un cambiamento di coordinate omogenee che porta la conica $\mathscr{A}$ nella sua forma canonica proiettiva.

(iv) (**1pt**) Provare che non esiste alcun cambiamento di coordinate omogenee che trasforma la chiusura proiettiva delle coniche della famiglia $\mathscr{F}$ nella conica $\mathscr{A}$.