Sapienza Università di Roma – Facoltà ICI
Laurea in Ingegneria Energetica A.A. 2014/15
Prova2 di Geometria – 24 Giugno 2015
Prof. Cigliola

1)	2)	3)	4)	5)	FAC.:

N.B. La parte sovrastante è riservata al docente.

Nome	Matricola

"Per tre punti passa una sola retta."
(On. De Maio, Vicepresidente della Camera)

Esercizio 1.

Parte A. Per ciascuna delle seguenti questioni, si indichi la (sola) risposta corretta. Ogni risposta esatta vale 2 punti, ogni risposta errata −1 punto ed ogni risposta non data 0 punti.

A1) Sono dati i sottospazi di $\mathbb{R}^3$:

$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x + 2y - z = y + z = 0\}$$

$$U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x + z = y - x = 0\}.$$

Allora

(a) Si ha che $U \oplus W = \mathbb{R}^3$.
(b) $W = \mathcal{L}((3, 1, 1), (1, 0, 0))$.
(c) Risulta che $(0, -1, 0) \in U \cap U^\perp \cap W^\perp$.
(d) $U^\perp = \mathcal{L}((1, 0, 1), (-1, 1, 0))$.

A2) Sono date due matrici A e B, di tipo 3×3 ed antisimmetriche, tali che $2A + B = \mathbf{0}_3$. Una sola delle seguenti affermazioni è falsa. Quale?

(a) Si ha che $2A^T + B^T = \mathbf{0}_3$.
(b) La matrice $(A + B)^{1111}$ è antisimmetrica.
(c) La matrice A^n è simmetrica per ogni intero $n > 1$.
(d) La matrice $(A^T - 2B)^2$ è simmetrica.

Parte B. Si stabilisca se le seguenti affermazioni sono vere o false. Ogni risposta esatta vale $0,5$ punti, ogni risposta errata $-0,25$ punti ed ogni risposta non data 0 punti.

B1) Sia $\{e_1, e_2, e_3\}$ una base di $\mathbb{R}^3$. Un endomorfismo f di $\mathbb{R}^3$ è diagonalizzabile. Si sa che -2 e 0 sono suoi autovalori di molteplicità rispettivamente 2 e 1. Inoltre è dato che $f(e_1 + e_2) = -2e_1 - 2e_2$.

$\boxed{\textbf{V}}$ $\boxed{\textbf{F}}$ Può capitare che $f(e_1 - e_2) = \mathbf{0}$.

$\boxed{\textbf{V}}$ $\boxed{\textbf{F}}$ Può capitare che $f(e_1) = \mathbf{0}$ e $f(e_3) = \mathbf{0}$.

$\boxed{\textbf{V}}$ $\boxed{\textbf{F}}$ Può capitare che $f(e_1) = -2e_1$ e che $f(e_2) = -2e_2$.

$\boxed{\textbf{V}}$ $\boxed{\textbf{F}}$ L'endomorfismo f è suriettivo.

B2) Sono dati nel piano i punti

$$A(1,1) \qquad B(4,1) \qquad C(7,2) \qquad D(4,2).$$

$\boxed{\textbf{V}}$ $\boxed{\textbf{F}}$ Il quadrilatero $ABCD$ è un parallelogramma.

$\boxed{\textbf{V}}$ $\boxed{\textbf{F}}$ L'area del quadrilatero $ABCD$ vale 3.

$\boxed{\textbf{V}}$ $\boxed{\textbf{F}}$ $\left\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}\right\| = 3$.

$\boxed{\textbf{V}}$ $\boxed{\textbf{F}}$ Il triangolo ABC è isoscele.

B3) Sono date le coniche euclidee

$$\mathscr{C}_1 :\ 4x^2 + y^2 - 4 = 0 \qquad \text{e} \qquad \mathscr{C}_2 :\ 4x^2 - y^2 - 4 = 0.$$

$\boxed{\textbf{V}}$ $\boxed{\textbf{F}}$ Le due coniche non hanno lo stesso rango.

$\boxed{\textbf{V}}$ $\boxed{\textbf{F}}$ Le due coniche sono isometriche.

$\boxed{\textbf{V}}$ $\boxed{\textbf{F}}$ La curva unione di $\mathscr{C}_1$ e $\mathscr{C}_2$ non ha punti singolari.

$\boxed{\textbf{V}}$ $\boxed{\textbf{F}}$ Ogni retta tangente a $\mathscr{C}_1$ interseca la conica $\mathscr{C}_2$ e viceversa, ogni retta tangente a $\mathscr{C}_2$ interseca $\mathscr{C}_1$.

Esercizio Facoltativo. Sia $h \in \mathbb{R}$. Un endomorfismo non nullo F di $\mathbb{R}^3$ ha polinomio caratteristico

$$p(x) = -x(x^2 - h^2).$$

(a) Per quali valori di h si ha che F è iniettivo?

(b) Per quali valori di h si ha che F è surgettivo?

(c) Stabilire se esistono valori di h per cui F è diagonalizzabile.

Esercizio 2. Discutere e risolvere al variare del parametro reale k, il seguente sistema lineare in tre equazioni nelle quattro incognite X_1, X_2, X_3, X_4:

$$\begin{cases} X_3 + kX_4 = k \\ kX_2 + kX_3 = 1 \\ (k-1)X_1 + X_2 = 0 \end{cases}$$

Esercizio 3. Si consideri l'endomorfismo $F : \mathbb{R}_{\leqslant 2}[x] \to \mathbb{R}_{\leqslant 2}[x]$, associato rispetto alla base canonica $\{1, x, x^2\}$ alla matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

(a) (**1pt**) Calcolare esplicitamente $F(p(x))$, per un generico polinomio $p(x) = a + bx + cx^2$.

(b) (**1pt**) Dato il sottospazio $W = \mathcal{L}(1)$, provare che $F(W) = \mathcal{L}(x + x^2)$.

(c) (**1pt**) Calcolare la controimmagine $F^{-1}(x^2)$.

(d) (**1pt**) Verificare che $F^3 = 0$.

(e) (**1pt**) Determinare una base di $\mathrm{Ker}(F)$ e di $\mathrm{Im}(F)$ e stabilire se

$$\mathrm{Ker}(F) \oplus \mathrm{Im}(F) = \mathbb{R}_{\leqslant 2}[x].$$

(f) (**1pt**) Stabilire se F è diagonalizzabile.

Esercizio 4. Sia k un parametro reale. Siano dati nello spazio euclideo il punto P, la retta r ed il piano π_k dove:

$$P = (1, -3, 9) \qquad r : \begin{cases} x + z - 1 = 0 \\ x - 6y - z = -9 \end{cases} \qquad \pi_k : \; kx - y + 3z = 2k.$$

(a) (**2pt**) Per quali valori di k si ha che r e π_k sono paralleli? Calcolare in tal caso la loro distanza. Per quali k invece sono ortogonali?

(b) (**1.5 pt**) Calcolare la distanza di P da r.

(c) (**1pt**) Determinare un piano contenente P ed r.

(d) (**1.5 pt**) Al variare di k, determinare in π_k una retta sghemba con r e passante per il punto $Q(2, 0, 0)$.

Esercizio 5. Si consideri la curva piana

$$\mathscr{C} : \; x^4 + y^4 + xy + 2(x + y)^2 = 0.$$

(a) (**1pt**) Determinare tutte le simmetrie di $\mathscr{C}$.

(b) (**1pt**) Dire se $\mathscr{C}$ è una curva liscia.

(c) (**1pt**) Verificato che $\mathscr{C}$ passa per l'origine, determinarne il complesso tangente.

(d) (**1pt**) Provare che $\mathscr{C}$ non ammette asintoti.

(e) (**2pt**) Tracciare il grafico di $\mathscr{C}$. (*Suggerimento:* il grafico della curva è limitato)

Esercizio 5 (Alternativo, 10pt). Si legga il testo e si risponda alle questioni seguenti.

12. *De Tridente.*

In secundo aequationum casu habebatur aequatio

$$xy = ax^3 + bx^2 + cx + d.$$

Et figura in hoc casu habet quattuor crura infinita, quorum duo sunt hyperbolica circa asymptoton AG in contrarias partes tendentia, et duo parabolica convergentia, et cum prioribus speciem tridentis fere efformantia. Estque haec figura parabola illa, per quam Cartesius aequationes sex dimensionum construxit. Haec est igitur species sexagesima sexta.

13. *De parabolis quinque divergentibus.*

In tertio casu aequatio erat

$$y^2 = ax^3 + bx^2 + cx + d,$$

et parabolam designat, cuius crura divergunt ab invicem, et in contrarias partes infinite progrediuntur. Abscissa AB est eius Diameter, et species eius sunt quinque sequentes.

Si aequationis $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, radices omnes $A\tau$, AT, At, sunt reales et inaequales, figura est Parabola divergens campaniformis cum *ovali* ad verticem. Et species est sexagesima septima.

Si radices duae sunt aequales, Parabola prodit, vel *nodata* contingendo ovalem, vel *punctata*, ob ovalem infinite parvam. Quae *duae species* sunt sexagesima octava, et sexagesima nona.

Si tres radices sunt aequales, Parabola erit *cuspidata* in vertice et haec est parabola *Neiliana*, quae vulgo *semicubica* dicitur. Et species septuagesima.

Si radices duae sunt impossibiles, habetur Parabola *Pura* campaniformis speciem septuagesimam primam constituens.

(a) Chi è l'autore del testo? Da dove è tratto il brano riportato? In che epoca è stato scritto?

(b) Utilizzando eventualmente anche gli strumenti dell'Analisi Matematica, si tracci il grafico della curva

$$\mathscr{P}: \; xy = x^3 - 2x^2 + x - 1.$$

Come è detta una curva con un grafico simile a quello di $\mathscr{P}$?

(c) Cosa si intende con il termine *crura*? Qual è la differenza tra *crura hyperbolica* e *crura parabolica*? Li si individui, se possibile, nel grafico di $\mathscr{P}$.

(d) Si faccia un esempio per ciascuna delle cinque specie di *parabolae divergentes* trattate nel paragrafo **13.** del testo riportato.

(e) Dimostrare che una parabola divergente attraversa necessariamente l'asse delle x e che i suoi '*crura divergunt ab invicem, et in contrarias partes infinite progrediuntur*'.