Sapienza Università di Roma – Facoltà ICI
Laurea in Ingegneria Energetica A.A. 2018/19
Prova2 di Geometria – 11 Gennaio 2018
Prof. Cigliola

Nome:	Mat.:

AVVERTENZE. Non è consentito utilizzare - pena l'annullamento della prova - note, libri di testo, appunti, cellulari, tablet, supporti cartacei o elettronici in genere. Giustificare esaurientemente ogni risposta data.

Esercizio 1. Si considerino nello spazio euclideo i punti

$$A(1,2,-1), \qquad B(2,-1,0) \qquad C(1,1,1)$$

(a) (**1pt**) Stabilire se il triangolo ABC è rettangolo.

(b) (**1pt**) Calcolare il perimetro del triangolo ABC.

(c) (**1pt**) Trovare equazioni cartesiane e parametriche della retta passante per A e C.

(d) (**2pt**) Trovare, se esiste, una sfera che passa per i punti A e B ma non per il punto C.

Esercizio 2. Sono dati i due sottospazi di $\mathbb{R}^4$:

$$U : \begin{cases} x_1 - 2x_3 - x_4 = 0 \\ x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases} \qquad W : \left\{ x_1 - x_2 + x_4 = 0 \right.$$

(a) (**2pt**) Calcolare basi e dimensioni di U e W.

(b) (**2pt**) Verificare la formula di Grassmann per i sottospazi U e W.

(c) (**1pt**) Stabilire se è vero che $U^\perp \oplus W^\perp = \mathbb{R}^4$.

(d) (**1pt**) Calcolare una base ortonormale di W.

Esercizio 3. Al variare di $k \in \mathbb{R}$ è dato l'endomorfismo F di $\mathbb{R}^4$ tale che

$$F(1,0,0,0) = (0,1,0,0) \qquad F(0,1,0,0) = (1,0,0,1) \qquad F(0,0,1,0) = (0,0,1,k) \qquad F(0,0,0,1) = (0,0,1,k).$$

(a) (**1pt**) Per quali valori di k l'endomorfismo F è invertibile?

(b) (**2pt**) Al variare di k, calcolare la dimensione del nucleo di F.

(c) (**3pt**) Studiare la diagonalizzabilità di F al variare di k.

Esercizio 4. (**4pt**) Classificare e portare in forma canonica la conica euclidea

$$\mathscr{C} : \; 3x^2 + 2xy + 3y^2 + 2x - 1 = 0$$

illustrando le isometrie usate.

Esercizio 5. Sia data la forma quadratica Q su $\mathbb{R}^4$ tale che

$$Q(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 + 2x_2x_3 + x_3^2 - 2x_1x_4.$$

(i) (**1pt**) Stabilire se Q risulta degenere.

(ii) (**2pt**) Calcolare una base di Sylvester per Q.

(iii) (**1pt**) Calcolare la segnatura di Q.

Esercizio 6. (a) (**1pt**) Dare la definizione di vettori linearmente indipendenti.

(b) (**2pt**) Dimostrare che se da un insieme di vettori linearmente indipendenti si eliminano dei vettori, i rimanenti sono ancora dei vettori linearmente indipendenti.

(c) (**2pt**) Classificare la posizione reciproca di due piani nello spazio (si dimostri il risultato enunciato).

(d) (**2pt**) Dimostrare che il nucleo di un'applicazione lineare è un sottospazio vettoriale del dominio.