Sapienza Università di Roma – Facoltà ICI
Laurea in Ingegneria Energetica A.A. 2016/17
Prova2 di Geometria – 12 Gennaio 2018
Prof. Cigliola

1)	2)	3)	4)	5)	Tot.

N.B. La parte sovrastante è riservata al docente.

Nome:	Mat.:

"*Nessuno resta buono in questo mondo.*"
(Superman)

AVVERTENZE. Non è consentito utilizzare, pena l'annullamento della prova, note, libri di testo, appunti, cellulari, tablet, supporti cartacei o elettronici in genere. È consentito utilizzare soltanto la tabella delle superficie quadriche fornita dal docente. Le risposte del primo esercizio non vanno giustificate. Tutte le altre sì ed in maniera chiara e concisa.

Esercizio 1.

Parte A. Per ciascuna delle seguenti questioni, si indichi la (sola) risposta corretta. Ogni risposta esatta vale 2 punti, ogni risposta errata −1 punto ed ogni risposta non data 0 punti.

A1) È data la matrice A quadrata di ordine 4 i cui elementi a_{ij} sono definiti come segue:

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{se } i - 2j = 0 \\ i - j & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Allora

(a) A è antisimmetrica
(b) A ha rango 4
(c) A è ortogonale
(d) il determinante di A è nullo

A2) Il triangolo di vertici $A(-1, 2, -1)$ $B(2, 1, 0)$ e $C(1, -1, -1)$

(a) è isoscele
(b) ha area di misura $\sqrt{\frac{31}{2}}$
(c) giace nel piano di equazione $5x + 2y + z - 8 = 0$
(d) ha perimetro di misura 8

Parte B. Si stabilisca se le seguenti affermazioni sono vere o false. Ogni risposta esatta vale $0,5$ punti, ogni risposta errata $-0,25$ punti ed ogni risposta non data 0 punti.

B1) Sono dati i due sottospazi di $\mathbb{R}^4$:

$$U : \begin{cases} x_1 - x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_2 + x_4 = 0 \end{cases} \qquad\qquad W : \begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

V **F** Entrambi $U^\perp$ e $W^\perp$ hanno dimensione 2.

V **F** $U + W$ ha dimensione 3.

V **F** $U^\perp \oplus W^\perp = \mathbb{R}^4$.

V **F** Una base di $U^\perp$ è data da $\{(1, 0, -1, -2),\ (0, 1, 0, 1)\}$.

B2) Le rette $r:\ 2x - ky = 2$ ed $s:\ x - ky = 1$

V **F** sono parallele per ogni valore di k

V **F** sono perpendicolari per $k = \pm\sqrt{2}$

V **F** sono coincidenti per $k = 1$

V **F** sono incidenti solo per $k = 2$

B3) È data la base ortonormale $\{u,\ v,\ w\}$ di $\mathbb{R}^3$. Allora

V **F** $\{w,\ v,\ u \wedge w\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$.

V **F** $\{-2u,\ -2v,\ w\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$.

V **F** $\{u,\ -v,\ -w\}$ è una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$.

V **F** $\{u - v,\ u - w,\ v + w\}$ è una base ortogonale di $\mathbb{R}^3$.

Esercizio 2. Al variare di $h \in \mathbb{R}$ discutere e risolvere il sistema lineare

$$\begin{cases} hx + z = 1 \\ x + z = 1 \\ hx + hz = 2h \\ hx + y = h \end{cases}$$

Esercizio 3. Sia $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ la base canonica di $\mathbb{R}^4$. Al variare di $k \in \mathbb{R}$ è dato l'endomorfismo F di $\mathbb{R}^4$ tale che

$$F(e_1) = e_2 \qquad F(e_2) = e_1 + e_4 \qquad F(e_3) = e_3 + ke_4 \qquad F(e_4) = e_3 + ke_4.$$

(a) (**1pt**) Per quali valori di k l'endomorfismo F è iniettivo?

(b) (**2pt**) Al variare di k, calcolare la dimensione del nucleo e dell'immagine di F.

(c) (**3pt**) Studiare la diagonalizzabilità di F al variare di k.

Esercizio 4. Sono date le rette

$$r : \begin{cases} x = 1 \\ y = -z \end{cases} \qquad \text{e} \qquad s : \begin{cases} x = y \\ z = 1. \end{cases}$$

(i) (**2pt**) Determinare la posizione reciproca tra r ed s.

(ii) (**2pt**) Calcolare la distanza tra r ed s.

(iii) (**2pt**) Trovare, se esiste, una sfera tangente sia ad r che ad s.

Esercizio 5. Classificare e portare in forma canonica la conica euclidea

$$\mathscr{C} : \; 3x^2 + 2xy + 3y^2 + 2\sqrt{2}x + 1 = 0$$

illustrando le isometrie usate.