Sapienza Università di Roma – Facoltà ICI
Laurea in Ingegneria Energetica A.A. 2016/17
Prova1 di Geometria – 20 Gennaio 2017
Prof. Cigliola

1)	2)	3)	4)	5)	Fac.	Tot.

N.B. La parte sovrastante è riservata al docente.

Nome:	Mat.:

"*La democrazia vive se c'è un buon livello di cultura diffusa. Se questo non c'è, le istituzioni democratiche - pur sempre migliori dei totalitarismi e dei fascismi - sono forme vuote.*"
(T. De Mauro)

AVVERTENZE. Non è consentito utilizzare, pena l'annullamento della prova, note, libri di testo, appunti, cellulari, tablet, supporti cartacei o elettronici in genere. È consentito utilizzare soltanto la tabella delle superficie quadriche fornita dal docente. Le risposte del primo esercizio non vanno giustificate. Tutte le altre sì ed in maniera chiara e concisa.

Esercizio 1.
Parte A. Per ciascuna delle seguenti questioni, si indichi la (sola) risposta corretta. Ogni risposta esatta vale 2 punti, ogni risposta errata −1 punto ed ogni risposta non data 0 punti.

A1) Si consideri la quadrica
$$\mathscr{Q}: \; 6xz + 8yz - 5x = 0.$$
Allora

(a) $\mathscr{Q}$ passa per il punto $(1, 1, 1)$.
(b) $\mathscr{Q}$ è un ellissoide.
(c) $\mathscr{Q}$ è un paraboloide.
(d) $\mathscr{Q}$ è un iperboloide.

A2) È dato l'endomorfismo diagonalizzabile F di $\mathbb{R}^4$ che ha come autovalori 1 e 0 entrambi con molteplicità 2. Quale tra le seguenti è **falsa**?

(a) L'espressione generale di F può essere $F(x, y, z, t) = (x;\; y;\; -x - y;\; -x + y)$.
(b) Il sottospazio di $\mathbb{R}^4$
$$\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid F(x, y, z, t) = (-2x, -2y, -2z, -2t)\}$$
ha dimensione 1.
(c) Il polinomio caratteristico di F è $p(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda^3 + \lambda^4$.
(d) L'immagine di F non può essere il sottospazio
$$\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + t = 0, \quad x - z + y = 0, \quad 2x - z + 3t = 0\}.$$

Parte B. Si stabilisca se le seguenti affermazioni sono vere o false. Ogni risposta esatta vale $0,5$ punti, ogni risposta errata $-0,25$ punti ed ogni risposta non data 0 punti.

B1) Al variare del parametro reale k, è data la forma quadratica su $\mathbb{R}^4$:

$$Q(x,y,z,t) = -2xz + y^2 + 2kxt - 2yt + kt^2$$

V **F** Per $k=0$ la segnatura di Q è $(2,2)$.

V **F** Q non definisce un prodotto scalare per nessun valore di k.

V **F** Per $k=1$, il sottospazio $W = \{(x,y,z,t) \,|\, y-z=0,\ z-t=0\}$ ha sottospazio ortogonale $W^{\perp}$ rispetto a Q di dimensione 2.

V **F** Per $k = -\log 17$ non esistono basi diagonalizzanti per Q.

B2) Si considerino la curva algebrica piana affine

$$\mathscr{C}:\ x^3 - 2x^2y + x^2 - y^2 = 0$$

e la sua chiusura proiettiva $\overline{\mathscr{C}}$.

V **F** La curva $\mathscr{C}$ ammette l'asintoto $y = \frac{x}{2} + \frac{3}{8}$.

V **F** La molteplicità di intersezione tra la retta $r:\ x+2y=0$ e $\mathscr{C}$ nell'origine è 2.

V **F** La molteplicità di $\mathscr{C}$ nell'origine è 3.

V **F** Il gradiente omogeneo di $\overline{\mathscr{C}}$ è dato da

$$\nabla = (3X_1^2 - 4X_1X_2 + 2X_1X_0;\ -2X_1^2 - 2X_2X_0;\ X_1^2 - X_2^2).$$

V **F** Le rette passanti per l'origine intersecano $\mathscr{C}$ in al più due punti distinti.

V **F** La curva $\overline{\mathscr{C}}$ ha tangente $X_1 - 2X_2 - X_0 = 0$ nel punto $P = [1,0,-1]$.

B3) È data la base ortonormale $\{u,\ v,\ w\}$ di $\mathbb{R}^3$. Allora

V **F** $\{u-w+v,\ (w\cdot u)v,\ w+2u-v\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$.

V **F** $\{u+w,\ v - 5\dfrac{u\cdot v}{u\cdot u}u,\ u\wedge v\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$.

Esercizio 2. Sono dati in $\mathbb{R}^4$ i sottospazi

$$U = \{(x,y,z,t) \mid x - y + t = 0\} \qquad \text{e} \qquad W = \mathcal{L}((1,1,1,0),\ (1,0,1,0),\ (1,-1,1,0))$$

(i) (**1pt**) Dire se U e W sono isomorfi.

(ii) (**3pt**) Determinare una base ortonormale e la dimensione di $U \cap W$ e di $U + W$.

(iii) (**1pt**) Può esistere un endomorfismo di $\mathbb{R}^4$ che ha U e W come immagine e nucleo rispettivamente?

(iv) (**1pt**) Può esistere un endomorfismo di $\mathbb{R}^4$ che ha U e W come autospazi associati a 0 e 1 rispettivamente?

Esercizio 3. Si considerino le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

(i) (**3pt**) Provare che le matrici A, B e C ammettono gli stessi autovalori (contando le molteplicità algebriche).

(ii) (**3pt**) Quali tra le matrici A, B e C sono simili?

Esercizio 4. Sono dati i due piani

$$\pi:\ x + 2y + 2z + 4 = 0 \qquad \text{e} \qquad \sigma:\ x + 2y + 2z - 5 = 0.$$

(i) (**3pt**) Provare che i due piani sono paralleli e calcolarne la distanza.

(ii) (**3pt**) Costruire, se esiste, una sfera $\mathcal{S}$ tangente ai due piani π e σ ed avente il centro nel piano $\alpha:\ x + y + z + 1 = 0$.

Esercizio 5. Sono date la conica euclidea $\mathscr{C}$ e la conica proiettiva $\mathscr{D}$ di equazioni:

$$\mathscr{C}:\ 3x^2 + 4xy + 3y^2 + 2x + 2y - 1 = 0 \qquad \text{e} \qquad \mathscr{D}:\ -2X_0^2 + X_1X_0 + 2X_2X_0 + X_1^2 + X_1X_2 = 0.$$

(i) (**2pt**) Si classifichi $\mathscr{C}$ e si determini una isometria che la trasforma nella sua forma canonica euclidea.

(ii) (**2pt**) Determinare un cambiamento di coordinate proiettive che manda $\mathscr{D}$ nella sua forma canonica proiettiva.

(iii) (**2pt**) Stabilire se la chiusura proiettiva della conica $\mathscr{C}$ e la conica $\mathscr{D}$ hanno la stessa forma canonica proiettiva.

Esercizio Facoltativo. Quali sono le isometrie che trasformano in sé un piano tassellato interamente per mezzo di triangoli equilateri?