

Sapienza Università di Roma – Facoltà ICI
Laurea in Ingegneria Energetica A.A. 2015/16
Prova4 di Geometria – 18 Gennaio 2016
Programma 2015/16 – Prof. Cigliola

1)	2)	3)	4)	5)	Fac.	Tot.
----	----	----	----	----	------	------

N.B. La parte sovrastante è riservata al docente.

Nome:	Mat.:
-------	-------

“Tyger! Tyger! Burning bright
In the forests of the night:
What immortal hand or eye
Could frame thy fearful symmetry?”
(The tyger, W. Blake)

AVVERTENZE. Non è consentito utilizzare, pena l’annullamento della prova, note, libri di testo, appunti, cellulari, tablet, *supporti* cartacei o elettronici in genere. È consentito utilizzare soltanto la tabella delle superficie quadriche fornita dal docente. Le risposte del primo esercizio non vanno giustificate. Tutte le altre sì ed in maniera chiara e concisa.

Esercizio 1.

Parte A. Per ciascuna delle seguenti questioni, si indichi la (sola) risposta corretta. Ogni risposta esatta vale 2 punti, ogni risposta errata -1 punto ed ogni risposta non data 0 punti.

A1) Si consideri la quadrica $\mathcal{Q} : x^2 + 4y^2 - 2z + 3xy + 2x + 3y - 3 = 0$. Quale tra le seguenti è **falsa**?

- (a) \mathcal{Q} contiene l’asse x .
- (b) \mathcal{Q} è un paraboloido.
- (c) L’intersezione di \mathcal{Q} col piano $z = 0$ è un’ellissi.
- (d) \mathcal{Q} ha per sezioni piane solo coniche di tipo ellittico o parabolico.

A2) È data la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 56 & -107 \\ -56 & 0 & 44 \\ 107 & -44 & 0 \end{pmatrix}$. Allora

- (a) A^{14} è antisimmetrica.
- (b) A^6 non ha rango massimo.
- (c) A^8 non ammette l’autovalore nullo.
- (d) A^{10} è ortogonale.

Parte B. Si stabilisca se le seguenti affermazioni sono vere o false. Ogni risposta esatta vale 0,5 punti, ogni risposta errata -0,25 punti ed ogni risposta non data 0 punti.

B1) Un endomorfismo diagonalizzabile f di \mathbb{R}^4 ha gli autovalori 0 e -2 entrambi con molteplicità 1. Sia $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ la base canonica di \mathbb{R}^4 e sia Id l'identità su \mathbb{R}^4 .

V **F** Può accadere che $f(1, 2, -1, 0) = (-2, -4, 2, 0)$, $f(e_1 - 3e_2 + e_4) = (0, 0, 0, 0)$ e $f(e_1 - e_2 - 3e_3) = -2e_1 + 2e_2 + 6e_3$.

V **F** L'endomorfismo f può ammettere come polinomio caratteristico il polinomio $p(\lambda) = \lambda^4 - 4\lambda^3 + 4\lambda^2 - 3$.

V **F** L'applicazione f può avere matrice associata $\begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ rispetto a una qualche base di \mathbb{R}^4 .

V **F** L'endomorfismo $f + 2Id$ ha nucleo non banale.

V **F** L'applicazione f può avere come autospazi $U = \mathcal{L}((1, 1, -1, -1), (1, 1, 0, 0))$ e $W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y - z - t = 0, x - z + t = 0\}$.

B2) Sono dati i sottospazi di \mathbb{R}^4 :

$$U = \mathcal{L}((0, 1, -1, -1), (1, 1, 0, 0), (-1, 0, -1, 0))$$

$$W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y - z + t = 0, x + y - z + kt = 0, y - x = 0\}.$$

V **F** Per $k = 0$ risulta che $\dim(U + W) = 1$.

V **F** Per $k \neq 1$ una base di W è $\{(1, 1, 2, 0)\}$.

V **F** Per $k = 1$ si trova che $U \oplus W = \mathbb{R}^4$.

V **F** Per $k = -1$ si ha che $\dim(U \cap W) = 2$.

B3) Nel piano sono dati i punti $A(0, -3)$, $B(0, 2)$ e $C(-2, 2)$.

V **F** Il triangolo ABC ha area 8.

V **F** Non esiste un'isometria del piano che trasforma A, B, C ordinatamente nei punti $A(-2, 1)$, $B(1, 1)$ e $C(2, 1)$.

V **F** Si ha che $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = (0, 0, -2\sqrt{2})$.

Esercizio 2. Si consideri la forma quadratica su \mathbb{R}^4 definita da

$$Q(x_1, x_2, x_3, x_4) = 2k x_1 x_3 + 2x_2 x_4,$$

con k parametro reale.

- (i) **(1pt)** Determinare la matrice associata a Q rispetto alla base canonica.
- (ii) **(1,5pt)** Determinare rango e segnatura di Q al variare di $k \in \mathbb{R}$.
- (iii) **(2pt)** Diagonalizzare Q al variare di $k \in \mathbb{R}$ esplicitando la base diagonalizzante usata.
- (iv) **(1,5pt)** Al variare di k , determinare la dimensione del complemento ortogonale rispetto a Q del sottospazio $U = \mathcal{L}((1, 0, 0, -1), (-1, -1, 0, 0), (1, -1, 1, -1))$

Esercizio 3. Sono date la curva algebrica piana

$$\mathcal{K} : y^2(x + y + 1) - x^2 - y^2 = 0$$

e la conica

$$\mathcal{S} : 4x^2 + 8xy - 5x + 4y^2 - 5y + 1 = 0.$$

- (i) **(2pt)** Trovare i punti singolari e gli asintoti di \mathcal{K} .
- (ii) **(2pt)** Si tracci il grafico di \mathcal{K} .
- (iii) **(2pt)** Dopo aver dimostrato che \mathcal{S} è unione di due rette, si trovino esplicitamente le rette che la costituiscono.

Esercizio 4. (i) **(2pt)** Al variare di $k \in \mathbb{R}$, determinare la distanza del piano $x - z = 0$

dalla retta $r : \begin{cases} x + ky = 1 \\ x - y + z = 0. \end{cases}$

- (ii) **(1pt)** Determinare, se esiste, un piano che contiene le rette $r : \begin{cases} 2x + y - 3z - 2 = 0 \\ 3x - 5z + 1 = 0 \end{cases}$

e $s : \begin{cases} x = -10t \\ y = 2t + 1. \\ z = -6t + 3 \end{cases}$

- (iii) **(3pt)** Trovare una circonferenza dello spazio tangente l'asse x nel punto $A(2, 0, 0)$ e passante per il punto $B(-1, -1, 2)$.

Esercizio 5. Si consideri l'endomorfismo $F : \mathbb{R}_{\leq 2}[x] \rightarrow \mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ definito come:

$$F(ax^2 + bx + c) = a(x^2 - x + 1) + b(x^2 + 1) + c(x^2 - x + 1).$$

- (i) (1pt) Calcolare la matrice associata ad F rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$.
- (ii) (1pt) Calcolare l'immagine secondo F del sottospazio $U = \{ax^2 + bx + c \mid a + b + c = 0\}$.
- (iii) (1pt) Trovare la controimmagine secondo F del vettore $p(x) = (x + 1)^2$.
- (iv) (1pt) Trovare una base del nucleo e dell'immagine di F e dire se sono a somma diretta.
- (v) (1pt) Trovare l'insieme dei polinomi che vengono trasformati in sé stessi da F .
- (vi) (1pt) Decidere se F è diagonalizzabile.

Esercizio Facoltativo. Quali sono le isometrie piane che sono alla base dell'opera *Razze* di Escher?

