Sapienza Università di Roma – Facoltà ICI
Laurea in Ingegneria Energetica A.A. 2015/16
Prova1 di Geometria – 18 Gennaio 2016
Programma 2015/16 – Prof. Cigliola

1)	2)	3)	4)	5)	Fac.	Tot.

N.B. La parte sovrastante è riservata al docente.

Nome:	Mat.:

"Tyger! Tyger! Burning bright
In the forests of the night:
What immortal hand or eye
Could frame thy fearful symmetry?"
(The tyger, W. Blake)

AVVERTENZE. Non è consentito utilizzare, pena l'annullamento della prova, note, libri di testo, appunti, cellulari, tablet, *supporti* cartacei o elettronici in genere. È consentito utilizzare soltanto la tabella delle superficie quadriche fornita dal docente. Le risposte del primo esercizio non vanno giustificate. Tutte le altre sì ed in maniera chiara e concisa.

Esercizio 1.

Parte A. Per ciascuna delle seguenti questioni, si indichi la (sola) risposta corretta. Ogni risposta esatta vale 2 punti, ogni risposta errata −1 punto ed ogni risposta non data 0 punti.

A1) Si consideri la quadrica $\mathscr{Q}: \ 2xy - 2yz + 2x + 1 = 0$. Quale tra le seguenti è **falsa**?

(a) L'intersezione di $\mathscr{Q}$ col piano $z = 0$ è un'iperbole.

(b) $\mathscr{Q}$ contiene la retta che passa per i punti $\left(-\frac{1}{2}, 0, 0\right)$ e $\left(-\frac{1}{2}, 0, -1\right)$.

(c) $\mathscr{Q}$ è un ellissoide a punti reali.

(d) $\mathscr{Q}$ ha grafico illimitato.

A2) È data la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 100 & -17 \\ -100 & 0 & 31 \\ 17 & -31 & 0 \end{pmatrix}$. Allora

(a) A^4 è antisimmetrica.

(b) A^6 è invertibile.

(c) A^8 ammette l'autovalore nullo.

(d) A^{10} è ortogonale.

Parte B. Si stabilisca se le seguenti affermazioni sono vere o false. Ogni risposta esatta vale $0,5$ punti, ogni risposta errata $-0,25$ punti ed ogni risposta non data 0 punti.

B1) Un endomorfismo diagonalizzabile f di $\mathbb{R}^4$ ha l'autovalore 0 con molteplicità 2 e l'autovalore -2 che è semplice. Sia $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ la base canonica di $\mathbb{R}^4$ e sia Id l'identità su $\mathbb{R}^4$.

V **F** Può accadere che $f(1,2,-1,0) = (-2,-4,2,0)$, $f(e_1 - 3e_2 + e_4) = (0,0,0,0)$ e $f(e_1 + e_2 - 3e_3) = -2e_1 - 2e_2 + 6e_3$.

V **F** L'endomorfismo f può ammettere come polinomio caratteristico il polinomio $p(\lambda) = \lambda^4 - 4\lambda^3 + 4\lambda^2$.

V **F** L'applicazione f può avere matrice associata $\begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ rispetto a una qualche base di $\mathbb{R}^4$.

V **F** L'endomorfismo $f + 2Id$ di $\mathbb{R}^4$ è iniettivo.

V **F** L'applicazione f può avere come autospazi $U = \mathcal{L}((2,1,-1,-1),(1,1,0,0))$ e $W = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \,|\, x + y - z + t = 0,\ 2x - 3z + t = 0\}$.

B2) Sono dati i sottospazi di $\mathbb{R}^4$:

$$U = \mathcal{L}((0,1,-1,-1),(1,1,0,0),(1,0,1,0))$$

$$W = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \,|\, x + y - z + t = 0, \quad x + y - z + kt = 0, \quad x - y = 0\}.$$

V **F** Per $k = 0$ si ha che $\dim(U \cap W) = 2$.

V **F** Per $k = 1$ risulta che $\dim(U + W)^{\perp} = 1$.

V **F** Per $k = 2$ si trova che $U \oplus W = \mathbb{R}^4$.

V **F** Per $k \neq 1$ una base di W è $\{(1,1,2,0)\}$.

B3) Nel piano sono dati i punti $A(0,-3)$, $B(0,2)$ e $C(-2,2)$.

V **F** Il triangolo ABC ha area 8.

V **F** Non esiste un'isometria del piano che trasforma A, B, C ordinatamente nei punti $A(2,1)$, $B(1,1)$ e $C(-3,1)$.

V **F** Esistono esattamente tre punti nel piano che completano il triangolo ABC ad un parallelogramma.

Esercizio 2. Si consideri la forma quadratica su $\mathbb{R}^4$ definita da

$$Q(x_1, x_2, x_3, x_4) = 2k\, x_1 x_4 + 2x_2 x_3,$$

con k parametro reale.

(i) (**1pt**) Determinare la matrice associata a Q rispetto alla base canonica.

(ii) (**1,5pt**) Determinare rango e segnatura di Q al variare di $k \in \mathbb{R}$.

(iii) (**2pt**) Diagonalizzare Q al variare di $k \in \mathbb{R}$ esplicitando la base diagonalizzante usata.

(iv) (**1,5pt**) Al variare di k, determinare la dimensione del complemento ortogonale rispetto a Q del sottospazio $U = \mathcal{L}((1,0,0,-1),(1,1,0,0),(1,-1,1,-1))$

Esercizio 3. Sono date la curva algebrica piana

$$\mathscr{E}: \; x^2(x+y+1) - x^2 - y^2 = 0$$

e la conica

$$\mathscr{C}: \; 2x^2 + xy - 5x - 6y^2 + 11y - 3 = 0.$$

(i) (**2pt**) Trovare i punti singolari e gli asintoti di $\mathscr{E}$.

(ii) (**2pt**) Si tracci il grafico di $\mathscr{E}$.

(iii) (**2pt**) Dopo aver dimostrato che $\mathscr{C}$ è unione di due rette, si trovino esplicitamente le rette che la costituiscono.

Esercizio 4. (i) (**2pt**) Al variare di $k \in \mathbb{R}$, determinare la distanza del piano $y + z = 0$ dalla retta $r: \begin{cases} x + ky = 1 \\ x - y + z = 0. \end{cases}$

(ii) (**1pt**) Determinare, se esiste, un piano che contiene le rette $r: \begin{cases} x - y - 2z + 1 = 0 \\ 2x + y - 3z - 2 = 0 \end{cases}$ e $s: \begin{cases} x = -10t \\ y = 2t - 1. \\ z = -6t - 3 \end{cases}$

(iii) (**3pt**) Trovare una circonferenza dello spazio tangente l'asse x nel punto $A(2,0,0)$ e passante per il punto $B(1,-1,2)$.

Esercizio 5. Si consideri l'endomorfismo $F : \mathbb{R}_{\leqslant 2}[x] \longrightarrow \mathbb{R}_{\leqslant 2}[x]$ definito come:

$$F(ax^2 + bx + c) = a(x^2 + 1) + b(x^2 + 1) + c(x^2 - x + 1).$$

(i) (**1pt**) Calcolare la matrice associata ad F rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}_{\leqslant 2}[x]$.

(ii) (**1pt**) Calcolare l'immagine secondo F del sottospazio $U = \{ax^2 + bx + c \,|\, a + b + c = 0\}$.

(iii) (**1pt**) Trovare la controimmagine secondo F del vettore $p(x) = (x + 1)^2$.

(iv) (**1pt**) Trovare una base del nucleo e dell'immagine di F e dire se sono a somma diretta.

(v) (**1pt**) Dimostrare che l'insieme dei polinomi che vengono trasformati in sé stessi da F costituiscono un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}_{\leqslant 2}[x]$ di dimensione 1.

(vi) (**1pt**) Decidere se F è diagonalizzabile.

Esercizio Facoltativo. Quali sono le isometrie piane che sono alla base dell'opera *Razze* di Escher?